A szavazásos paradoxon

Van három ember: A, B és C, akik egy eldöntendő kérdést többségi szavazással válaszolnak meg, azaz a szavazásnak az eredménye az lesz, amire legtöbben (jelen esetben legalább ketten) szavaztak. Persze az emberek nem tévedhetetlenek, így mindhármuknál fennáll az esélye, hogy rosszul döntenek, ezek valószínűségei rendre:

A esetében  5%, azaz p(A) = 0.05  
B esetében 10%, azaz p(B) = 0.1  
C esetében 20%, azaz p(C) = 0.2  
  
Mivel csak igennel vagy nemmel lehet szavazni, ezért a helyes döntés valószínűsége mindhármuknál 1-p(X), azaz rendre:

A esetében 1– p(A) = 0.95  
B esetében 1– p(B) = 0.9  
C esetében 1– p(C) = 0.8

Kérdés: milyen eséllyel dönt rosszul a fenti szavazóbizottság?  
  
Összesen nyolc esetünk van aszerint, hogy az egyes emberek tévednek-e .Mivel az emberek egymástól függetlenül tévednek vagy sem, ezért egy-egy ilyen kimenetel esélye az egyes tévedések valószínűségeinek szorzata, azaz pl. annak az esélye, hogy A nem téved (0.95) és B téved (0.1) és C nem téved (0.8): p(n, i, n) = 0.95 · 0.1 · 0.8

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Téved-e  A B C | | | Téved-e a szavazás | Ennek a valószínűsége |
| n | n | n | n | 0,95 · 0,9 · 0,8 = 0,684 |
| n | n | i | n | 0,95 · 0,9 · 0,2 = 0,171 |
| n | i | n | n | 0,95 · 0,1· 0,8 = 0,076 |
| i | n | n | n | 0,05 · 0,9 · 0,8 = 0,036 |
| n | i | i | i | 0,95 · 0,1 · 0,2 = 0,019 |
| i | n | i | i | 0,05 · 0,9 · 0,2 = 0,009 |
| i | i | n | i | 0,05 · 0,1 · 0,8 = 0,004 |
| i | i | i | i | 0,05 · 0,1 · 0,2 = 0,001 |

(Ezen esetek diszjunktak, és az összes lehetőséget lefedik, így a valószínűségeik összege 1-et kell, hogy adjon.)

Azon esetek valószínűségeit összeadva, ahol a szavazás eredménye téved:p = 0.019 + 0.009 + 0.004 + 0.001 = 0.033, azaz a szavazás tévedésének esélye 3.3%, ami reális is.

A "paradoxon" akkor jön, ha a tévedésre leginkább hajlamos ember (C) úgy dönt, hogy ő ugyan nem akarja elrontani a szavazást a hibájával, inkább megnézi, hogy hogyan dönt a legjobb rálátású ember (A), és ő is úgy szavaz. (Gyakorlatban: megválasztja A-t képviselőjének, kinevezi frakcióvezetőjének, beáll *A* pártjába, koalícióra lép vele, stb.)

Azt gondolnánk, hogy ezzel, egy hibára hajlamosabb vélemény helyett egy kevésbé hajlamosat véve, csökkenni fog a szavazás hibahányada. Ehelyett azt kapjuk, hogy mivel így *A* szavazata kvázi duplán számít (a sajátja + C-é), ezért B szavazhat, ahogy akar, a kérdést *A* dönti el. Mégpedig a már ismert 5%-os hiba valószínűségével, a rendes szavazás 3.3%-a helyett, azaz a hibahányad nem hogy csökkent volna, hanem épp nőtt!

Ugyanezt tapasztaljuk 5 szavazó (A, B, C, D és E) esetén, ha p(A) = p(B) = 0.05, p(C) = p(D) = 0.1, p(E) = 0.2, és E áll be A szavazata mögé. Itt természetesen 25 = 32 egyedi esetet kellene figyelembe venni, de a gondolatmenet ugyanaz.

Tanulság: a független véleményekre épülő szavazás még nagyobb egyéni hibahányad esetén is jobb döntést eredményez, mintha kevesebb döntéshozó szavazna, akár kisebb hibahányad esetén is.

Morálisan azt mondanám, hogy ennyit a pártos/frakciós döntéshozásról ill. a képviseleti demokráciáról általában, de a mateknál maradva inkább csak a köv. kérdésekre koncentrálnék:

1. A háromfős példánál milyen hibahányadoktól kezdve javít ahatékonyságon C-nek az A mögé való beállása?

p(A) ≤ p(B)·p(C)/ { p(B)·p(C) + (1–p(B))·(1–p(C))}

2. Hogyan befolyásolja az eredményt, ha az egyéni döntések nem függetlenek, azaz pl. "ha A igent mond, akkor C is" és "ha C nemet mond, akkor B igent", stb. ? A fenti táblázatból kiesnek azok a sorok, amik a feltételeknek nem tesznek eleget, azaz a példa esetében:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Téved-e  A B C | | | Téved-e a szavazás | Ennek a valószínűsége |
| n | n | n | Kiesik, mert C nemet mondott, B viszont nem mondott igent | |
| n | n | i | n | 0,95 · 0,9 · 0,2 = 0,171 |
| n | i | n | n | 0,95 · 0,1· 0,8 = 0,076 |
| i | n | n | Kiesik, mert A igent mondott, C viszont nemet | |
| n | i | i | i | 0,95 · 0,1 · 0,2 = 0,019 |
| i | n | i | i | 0,05 · 0,9 · 0,2 = 0,009 |
| i | i | n | Kiesik, mert A igent mondott, C viszont nemet | |
| i | i | i | i | 0,05 · 0,1 · 0,2 = 0,001 |

A hibahányad: 0.019 + 0.009 + 0.001 = 0.029 = 2.9%, azaz egy ilyen kis"részrehajlás" még külön jót is tett a hibahányadnak :-).