Geometria 1 összefoglalás

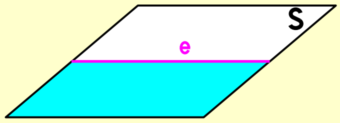
Alapfogalmak: a pont, az egyenes és a sík

Axiómák:

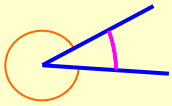
1. Bármely 2 pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes.
2. Három nem egy egyenesre eső pontra illeszkedik egy és csak egy sík.
3. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik a síkra, akkor az egész egyenes illeszkedik a síkra.
4. Két metsző egyenesre pontosan egy sík illeszthető.
5. Párhuzamossági axióma: Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Ezen a ponton keresztül pontosan egy párhuzamos húzható az adott egyenessel.

Egy egyenest egy pontja két **félegyenes**re bont.
Egy egyenest két pontja két nyitott félegyenesre és egy **szakasz**ra bont.

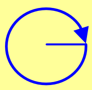
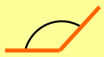
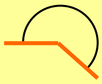
Egy síkot egy egyenese két **félsík**ra oszt.



Szög: A síknak egy olyan tartománya, amelyet két közös kezdőpontú félegyenes határol.

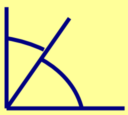
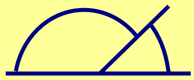


Szögek osztályozása:

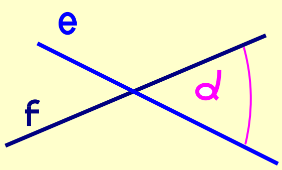
nullszög	teljes szög	hegyesszög	derék-szög	tompaszög	egyenesszög	homorúszög v. konkáv szög
						
	360°	$0 < \alpha < 90°$	$90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180°$	$180° < \alpha < 360°$
		konvex szögek				

A fok részei: $1^0 = 60'$ $1' = 60''$

Nevezetes szögpárok:

pótszögek	kiegészítő szögek	mellékszögek
		

Térelemek hajlásszöge

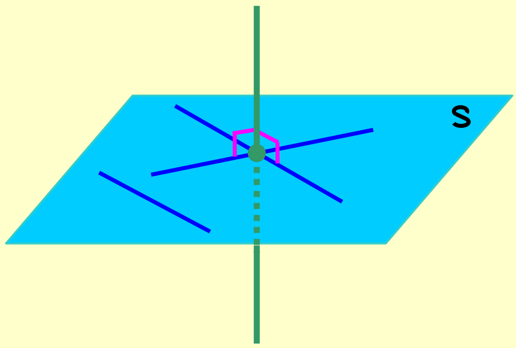


Két párhuzamos egyenes hajlásszöge $0°$.

Két metsző egyenes hajlásszöge az általuk meghatározott hegyesszög.

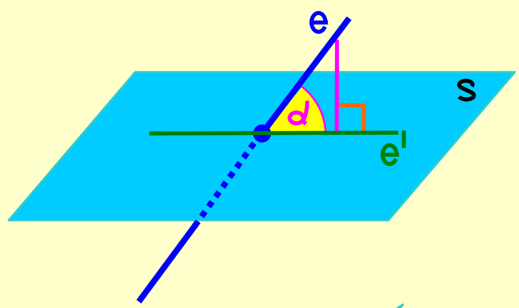
Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek alkotnak.

Egy egyenes és egy sík merőleges egymásra, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.



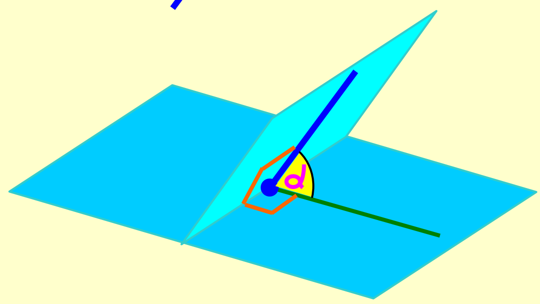
Ha egy egyenes metszi a síkot, de nem merőleges rá, akkor az **egyenes és sík hajlásszöge** az a szög, melyet az egyenes a síkra eső merőleges vetületével bezár.

Egy síknak és a vele párhuzamos egyenesnek a hajlásszöge 0º.



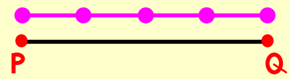
Két metsző sík hajlásszögének keresésénél a két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában a két sík mindegyikében egy-egy merőlegest állítunk a metszésvonalra. A két sík hajlásszöge az a szög, amelyet az így kapott két egyenes bezár egymással.

Két párhuzamos sík hajlásszöge 0º.



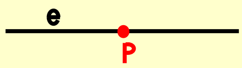
Távolságmérés:

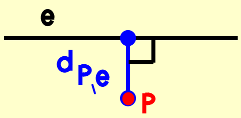
Megállapodás, hogy a távolság csak nem negatív szám lehet.
Egy **szakasz hossza** annyi, ahányszor ráfér a választott egységnyi szakasz.



Két pont távolságán az általuk meghatározott szakasz hosszát értjük.
Két ponthalmaz távolságán a legközelebbi pontjaik távolságát értjük (Ha van ilyen!).

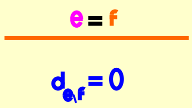
Pont és egyes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.

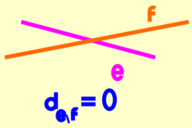


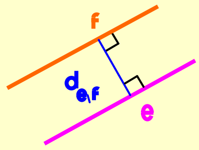


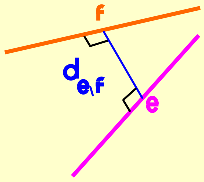
Két egyenes távolsága:

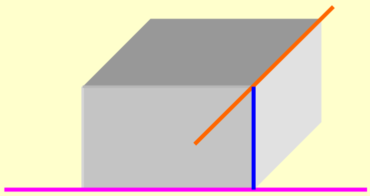
Metsző egyenesek távolsága 0.
Párhuzamos egyenesek távolsága a közéjük állítható merőleges szakasz hossza.
Kitérő egyenesek távolsága a közéjük állítható (egyetlen) merőleges szakasz hossza.

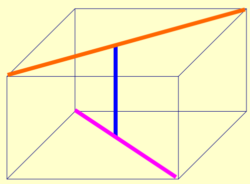




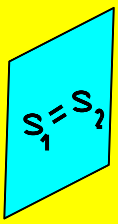
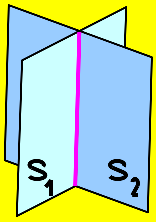
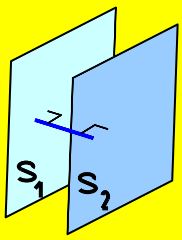




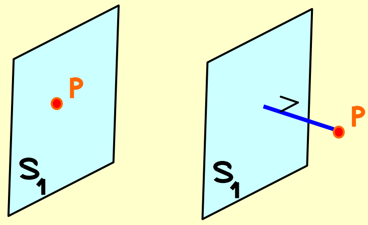




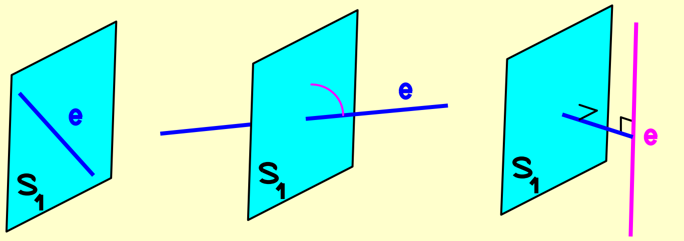
Két sík távolsága:

		
d = 0	Ha metszik egymást, akkor a távolságuk 0.	Párhuzamos síkok távolsága a közéjük állítható merőleges szakasz hossza.

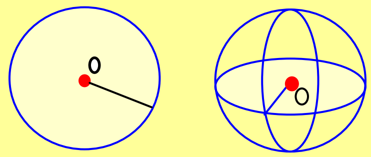
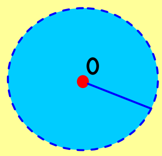
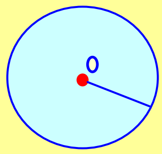
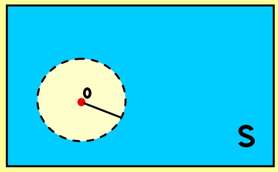
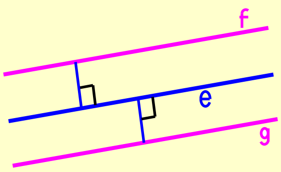
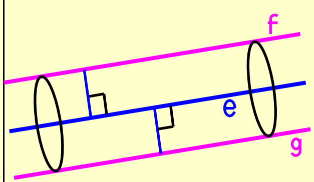
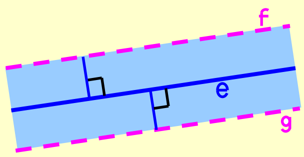
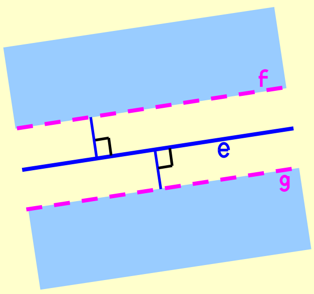
Pont és sík távolsága: 0 ha a pont illeszkedik a síkra. Pont és sík távolsága a pontból az egyenesre állítható merőleges szakasz hossza, ha pont nem illeszkedik a síkra.

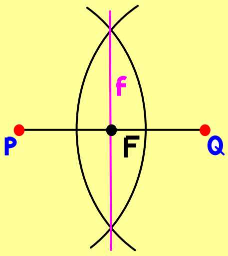
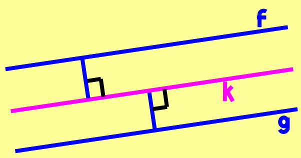
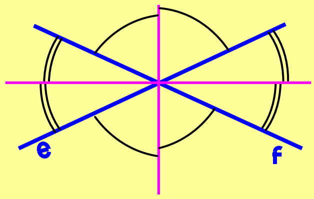


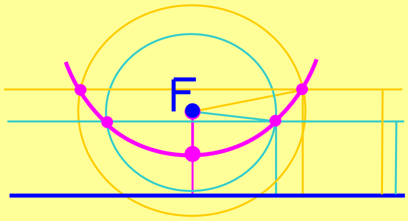
Egyenes és sík távolsága 0 ha van közös pontjuk. (Az egyenes a síkban van, vagy döfi a síkot.)
Egyenes és sík távolsága a közéjük állítható merőleges szakasz hossza, ha az egyenes párhuzamos a síkkal.

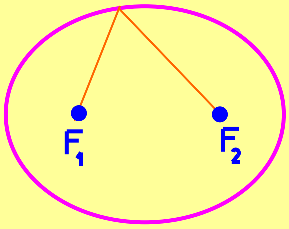


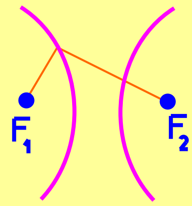
Nevezetes ponthalmazok

			
Adott ponttól ugyanolyan távolságra lévő halmaza síkban **kör,** térben **gömb.**	Adott ponttól egy adott távolságnál kisebb távolságra lévő pontok halmaza: nyitott körlemez. $\{P\|d_{PO} < r\}$	Adott ponttól egy adott távolságnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza: a **zárt körlemez.** $\{P \in S\|d_{PO} \le r\}$	Adott ponttól adott távolságnál nagyobb távolságra lévő pontok halmaza a síkban. $\{P \in \|d_{PO} > r\}$
			
Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban két párhuzamos egyenes.	Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a térben hengerfelület.	Adott egyenestől adott távolságnál kisebb távolságra lévő pontok halmaza.	Adott egyenestől adott távolságnál nagyobb távolságra lévő pontok halmaza.

		
Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza **szakaszfelező merőleges.**	Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a középpárhuzamos.	Két adott egymást metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a **szögfelező.**

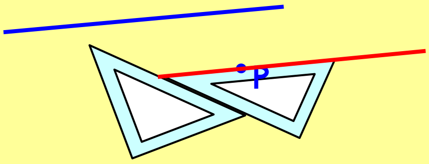


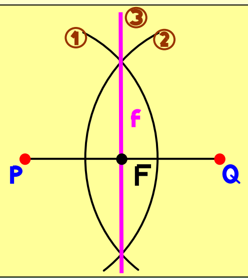


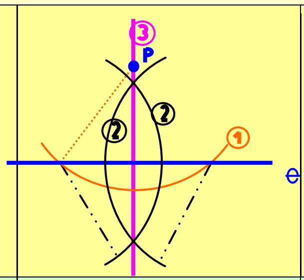


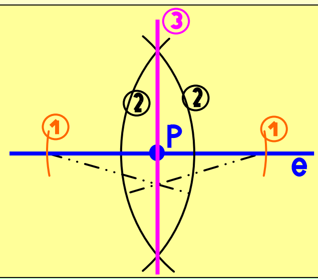
Adott egyenestől (vezéregyenes, direktrix) és egy adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a parabola. A vezéregyenes és a fókuszpont távolságát a parabola paraméterének nevezzük.	Ellipszis: Azon pontok halmaza, amelyeknek két adott ponttól vett távolságaik összege állandó.	Hiperbola: Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek az adott ponttól vett távolságaik különbsége állandó.

Alapszerkesztések:

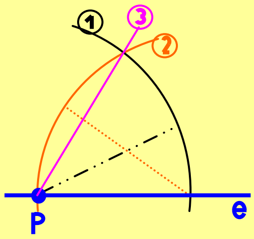


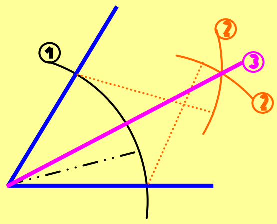


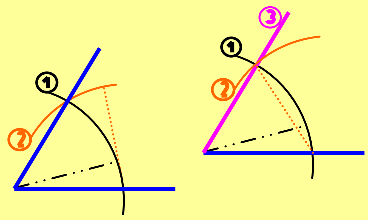




Párhuzamos szerkesztése.	Szakaszfelező merőleges szerkesztése.	Külső pontból merőleges állítása egy egyenesre.	Merőleges állítása az egyenesre az egyenes egy adott pontjában.







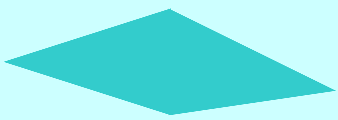
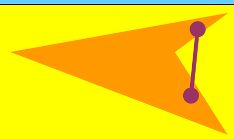
60°-os szög szerkesztése	Szögfelező szerkesztése	Szög másolása

Parabola, ellipszis és hiperbola szerkesztése.

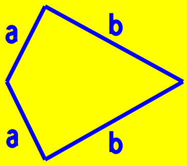
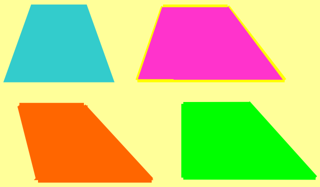
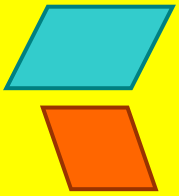
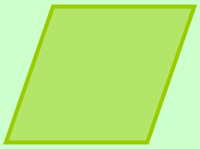
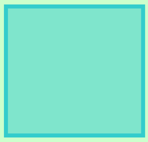
A háromszögek osztályozása:

Oldalak nagysága szerint	Szögek nagysága szerint	Szögek egyenlősége szerint
– általános háromszög; – egyenlő szárú háromszög; – egyenlő oldalú (szabályos) háromszög;	– hegyesszögű háromszög; – derékszögű háromszög; – tompaszögű háromszög;	– általános háromszög (nincs két egyenlő szöge); – két egyenlő szöggel rendelkező háromszög (egyenlőszárú háromszög); – három egyenlő szöggel rendelkező háromszög (szabályos háromszög);

A négyszögek

Konvex négyszög: bármely két belső pontját összekötő szakasz a sokszögön belül halad.	Konkáv négyszög: van két olyan pont, melynek összekötő szakasza a négyszögön kívül is halad.
	

Speciális négyszögek:

A deltoid olyan négyszög, aminek van két-két egyenlő hosszúságú oldala, ami szomszédos.	A trapéz olyan négyszög, aminek van két párhuzamos oldala.	A paralelogramma olyan négyszög, aminek a szemközti oldalai párhuzamosak.	A téglalap olyan négyszög, aminek a szemközti oldalai párhuzamosak és a szögei derékszögek.
			
A rombusz olyan négyszög, aminek a szemközti oldalai párhuzamosak és minden oldala ugyanolyan hosszú. 		A négyzet olyan négyszög, aminek a szemközti oldalai párhuzamosak, minden oldala ugyanolyan hosszú és a szögei derékszögek. 	

Geometriai transzformációk

A geometriai transzformáció olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya és az értékkészlete is ponthalmaz.

A távolságtartó (a szakasz és a képe ugyanolyan hosszú) geometriai transzformációkat egybevágósági transzformációnak nevezzük.

Fix pont: olyan pont, amelynek a képe önmaga.
Fix alakzat: minden pontja fix pont.
Invariáns alakzat: amelyeknek a képe önmaga, de pontjai nem maradnak helyben.

Egybevágósági transzformációk:

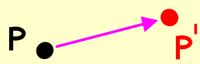
1. A helybenhagyás (identikus leképezés, identitás)

A hozzárendelési utasítás: minden pont képe önmaga.

Tulajdonságai:
- Minden pont képe önmaga
- Minden alakzat fix alakzat
- Távolságtartó
- Szögtartó
- Illeszkedéstartó (Ha egy pont rajta van egy alakzaton, akkor a pont képe rajta van az alakzat képén.)

2. Eltolás

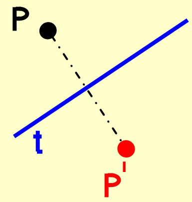
A hozzárendelési utasítás: Adott a síkban egy v vektor. Bármely pontnak a képét megkapjuk, ha a pontból, mint kezdőpontból felmérjük a v vektort. A vektor végpontját tekintjük a pont képének.



Az eltolás tulajdonságai:

- Fix pont nincs.
- Az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek invariáns egyenesek.
- Távolságtartó.
- Szögtartó.
- Az alakzatok körüljárási iránya nem változik meg.
- Párhuzamosság tartó (Az egyenes és a képe II).
- Illeszkedéstartó

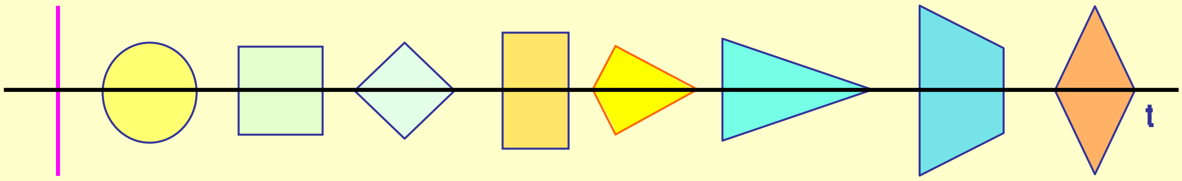
3. Tengelyes tükrözés



A hozzárendelési utasítás: Adott a síkban egy **t** egyenes. Ha a ***P*** pont rajta van a tengelyen, akkor a képe önmaga. Ha a ***P*** pont nem esik a tengelyre, akkor a ***P'*** pont az a pont, amelyiknél a ***P P'*** szakasznak a szakaszfelező merőlegese a tengely.

A tengelyes tükrözés tulajdonságai:

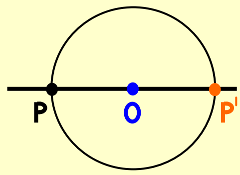
– A tengely fix egyenes más fix pontja nincs
- – Invariáns alakzatok:
  - A tengelyre merőleges egyenesek
  - Az olyan körök, amelyek középpontja a tengelyre esik, stb.



- – Távolságtartó.
- – Szögtartó.
- – A körüljárási irányt megfordítja.

4. A középpontos tükrözés

A hozzárendelési utasítás: Adott a síkban egy ***O*** ***pont*** (centrum). Bármely ***P*** pont képe az a ***P'*** pont, amely esetén a ***P'P*** szakasz felezőpontja az ***O*** pont.

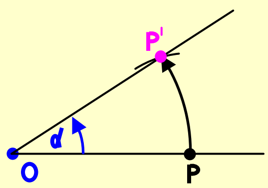


A középpontos tükrözés tulajdonságai:

- – Fix pont a centrum.
- – A centrumra illeszkedő egyenesek invariáns egyenesek, a centrummal koncentrikus körök, paralelogrammák stb. invariáns alakzatok.
- – Távolságtartó.
- – Szögtartó.
- – Az alakzatok körüljárási iránya nem változik meg.
- – Párhuzamosság tartó (Az egyenes és a képe ll).
- – Illeszkedéstartó

5. Elforgatás

A hozzárendelési utasítás: Adott a síkban egy **O** pont (A centrum), és egy α szög ($\alpha \neq 0^0$, $\alpha \neq 180^0$). Bármely P pont képét úgy szerkesztjük meg, hogy az O kezdőpontú a P ponton átmenő félegyenesre felmérjük az elforgatás szögét. A szög csúcsa az O pont. A szög szárára rámérjük az OP távolságot.



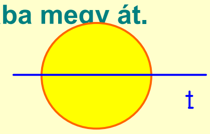
Az elforgatás tulajdonságai:

– Fix pont az ***O*** pont. ***O*** pont helyben marad, ***O*** pont *képe* önmaga
– Invariáns alakzat: az olyan körök, amelyek középpontja a centrum, a szabályos sokszögek.
– Távolságtartó.
– Szögtartó.
– Körüljárási irány nem változik.
– Az egyenesnek és a képének a szöge megegyezik az elforgatás szögével, ha $\alpha \leq 90^o$.
Ha $90° < \alpha \Rightarrow \measuredangle\left(e;é\right) = 180° - \alpha$

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok

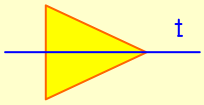
Egy alakzat **tengelyesen szimmetrikus,** ha van olyan egyenes, amelyre tükrözve önmagába megy át.

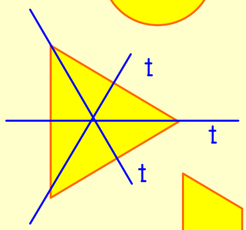
A kör bármely a középpontján átmenő egyenesre tengelyesen szimmetrikus.



Háromszögek tengelyes szimmetriája:

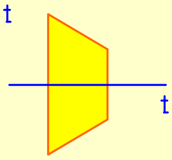
Az egyenlő szárú háromszögnek egy szimmetria tengelye van.
Szabályos háromszögnek 3 szimmetria tengelye van.
Az általános háromszögnek nincs szimmetria tengelye.



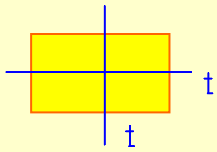


Tengelyesen szimmetrikus négyszögek:

Tengelyesen szimmetrikus az egyenlőszárú trapéz. (A trapéz olyan négyszög, amelynek van két párhuzamos oldala.)

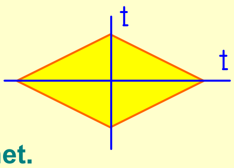


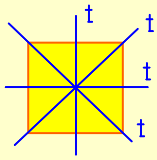
Paralelogramma: nincs szimm. tengelye. (A paralelogramma olyan négyszög, aminek a szemközti oldalai párhuzamosak.)

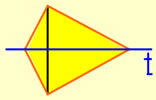


Téglalap: Két szimmetriatengelye van

Rombusz: Két szimmetriatengelye van. (A rombusz oldalai egyenlő hosszúak és a szemközti oldalai párhuzamosak.)







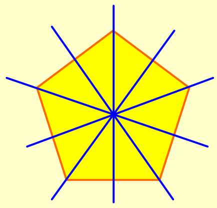
Négyzet: 4 szimmetria tengelye van.

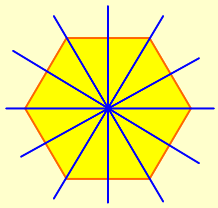
Deltoid: Egy szimmetriatengelye van.

Négyszögeknek 0, 1, 2, 4 szimmetriatengelye lehet.
Háromszögeknek 0, 1, 3 szimmetriatengelye lehet.

Szabályos sokszögek:

A szabályos sokszög olyan sokszög, amelynek az oldalai és szögei egyformák. A szabályos n oldalú sokszögnek n szimmetriatengelye van.

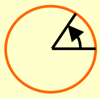




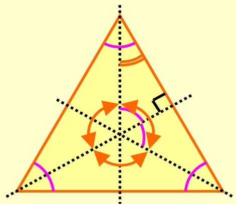
Forgásszimmetria

Egy **síkidom forgásszimmetrikus**, ha van a síkban olyan pont és olyan szög, amely pont körül az adott szöggel elforgatva az alakzat képe önmaga.

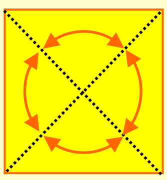
Pl.: A körvonalat a középpontja körül elforgatva önmagába megy át.

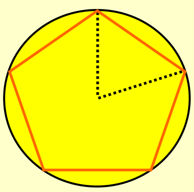


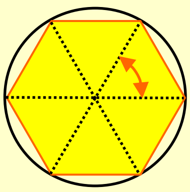
A szabályos háromszög az oldalfelező merőlegesek metszéspontja körül 120°-kal elforgatva önmagába megy át.



A szabályos sokszögek forgásszimmetrikusak a $\dfrac{360°}{n}$ szögű forgatásokra, illetve annak egész számú többszöröseire való forgatásra.



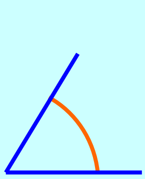
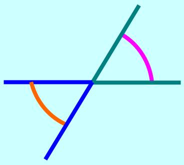
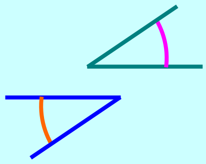
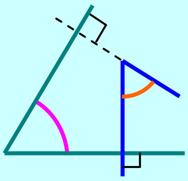




Alakzatok egybevágósága

Két alakzat egybevágó, ha véges számú egybevágósági transzformációval egymásba vihetők.

Szögek egybevágósága:

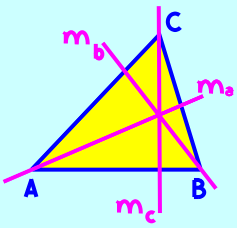
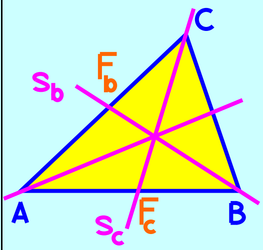
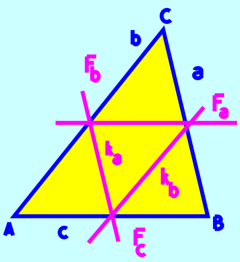
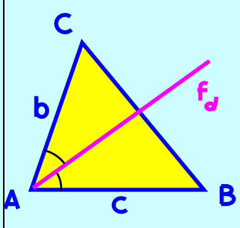
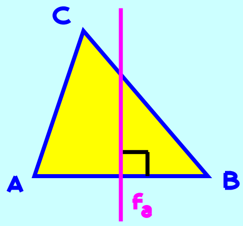
Egyállású szögek: száraik párhuzamosak és egyirányúak.	Csúcsszögek: a száraik egy egyenesbe esnek.	Váltószögek: száraik párhuzamosak és ellentétes irányúak.	A merőleges szárú azonos típusú szögek is megegyeznek.
			

A háromszögek egybevágóságának esetei:

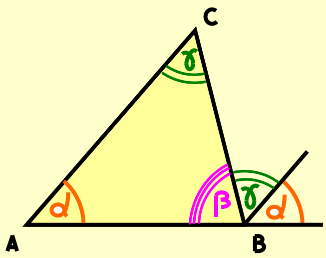
Két háromszög egybevágó, ha

a megfelelő oldalaik páronként megegyeznek;
két-két oldal és a közbezárt szög ugyanakkora;
egy-egy oldal és a rajta fekvő két szög ugyanakkora;
két-két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög ugyanakkora.

A háromszög nevezetes vonalai:

Magasságvonal: A csúcsból a szemközti oldalra állított merőlege egyenes vagy szakasz (ill. egyenes).	Súlyvonal: A csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.	Középvonal: a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakasz.	Belső szögfelező: olyan egyenes, amely felezi a háromszög belső szögét	Oldalfelező merőleges: olyan egyenes, amely átmegy az oldal felezőpontján és merőleges az oldalra.
				

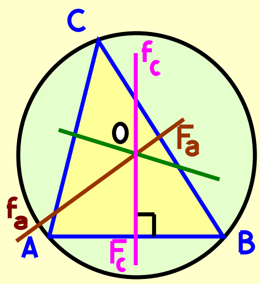
A háromszögekkel kapcsolatos tételek:



1. A háromszög belső szögeinek összege 180°.

2. A háromszög külső szöge megegyezik a nem szomszédos belső szögek összegével.

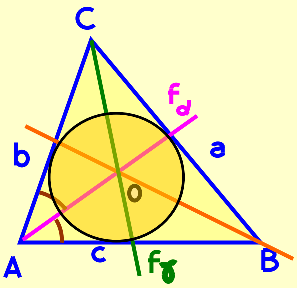
3. A háromszög külső szögeinek összege 360°.



4. A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Mivel az lező merőlegesek metszéspontja mind a három csúcstól ugyanolyan távolságra van, ezért ő a háromszög köré írható kör középpontja.

5. A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Mivel a szögfelezők metszéspontja mindhárom oldaltól ugyanolyan távolságra van, az a háromszögbe írható kör középpontja.



6. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

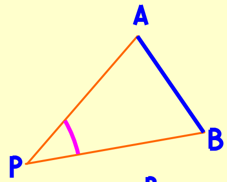
7. A háromszög középvonala feleakkora, mint a vele párhuzamos oldal.

8. A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, és a súlypont a súlyvonalakat 2: 1 arányban osztja.

9. Háromszög egyenlőtlenség: A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

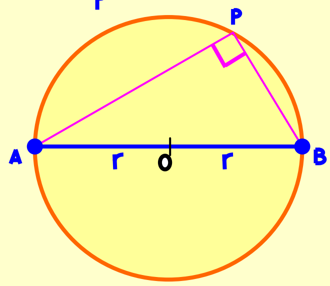
10. Bármely háromszögben a nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van.

11. Bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.



Látószög: adott egy *PQ* szakasz. Mit értünk az AB szakasz *P* pontbeli látószögén? Kössük össze a pontot a szakasz végpontjaival. Ezek által bezárt szög az AB szakasz *P* pontbeli látószöge.

Thalész-tétel: Azon pontok halmaza a térben, ahonnan egy szakasz derékszög alatt látszik, az a szakasz, mint átmérő fölé írt gömb pontjai, kivéve a szakasz két végpontját.



A derékszögű háromszög köré írható kör sugara egyenlő az átfogó felével, illetve az átfogóhoz tartozó súlyvonallal.

Pitagorasz-tétel:

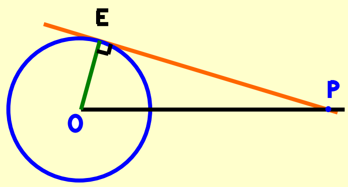
Derékszögű háromszögben az átfogó négyzete megegyezik a befogók négyzetének összegével.

A Pitagorasz-tétel megfordítása:

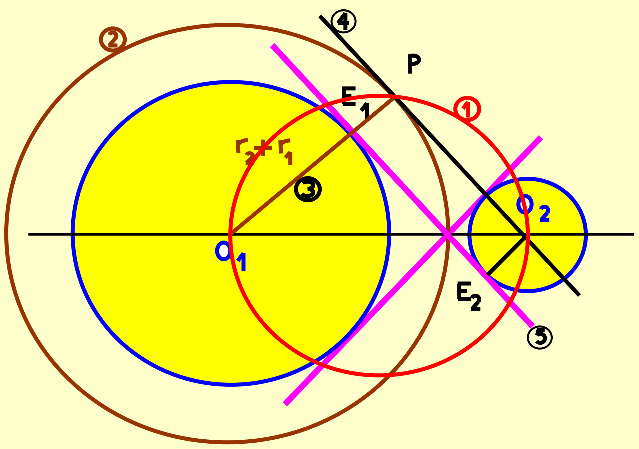
Ha egy háromszög két (kisebb) oldala négyzetének összege megegyezik a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

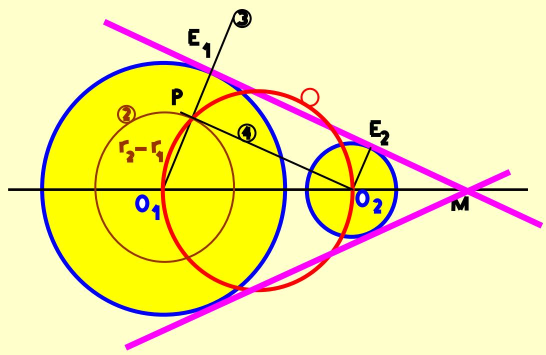
Tétel: Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

Az érintő olyan egyenes, aminek egy közös pontja van a körvonallal.



Két egymást nem metsző kör közös belső és közös külső érintője.





Tétel: Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180^{o}$