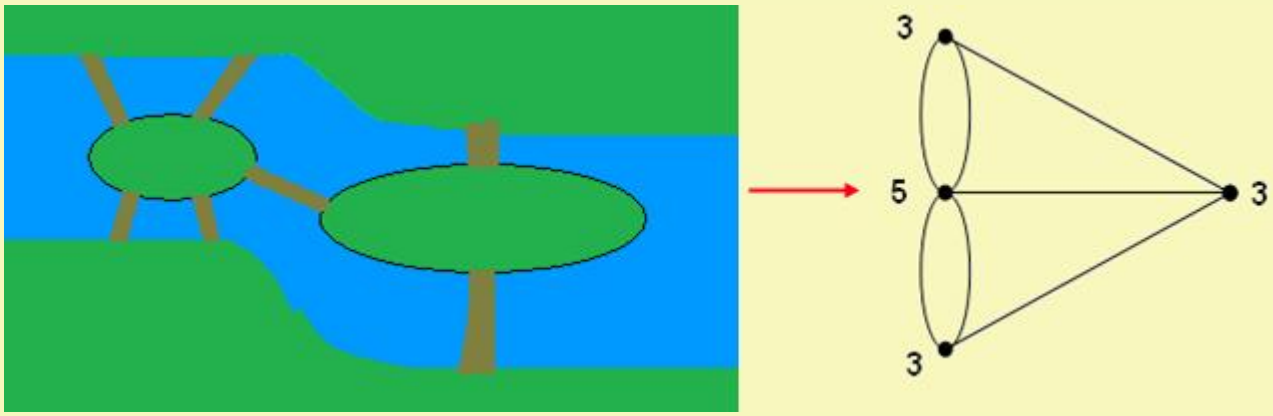
Alapfogalmak II

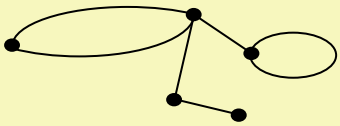
Nézzük meg a königsbergi séták problémáját! A város lakói vasárnaponként szerettek sétálni a szigeteken. Felvetődött a kérdés, hogy hogyan lehetne olyan sétát tenni a városban, hogy e közben minden hídon pontosan egyszer haladjanak át, és visszaérkezzenek a kiindulópontra.
Ha a próba-szerencse módszerrel dolgozunk, és 10 000 olyan esetet találunk, ami nem jó, az még nem jelenti azt, hogy nincs megoldás (Csak nem találtuk meg!). Ahhoz, hogy kijelenthessük, hogy a feladatnak nincs megoldása, végig kellene vizsgálni az összes bejárási lehetőséget, ami általában nagyon sok esetet jelent, ezért célszerű más módszert keresni.

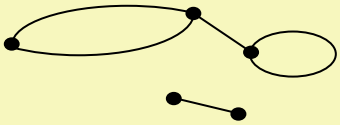


Pl. gondolkodjunk! Ha valamely csúcsból kiindulunk, és oda visszaérkezünk, akkor minden csúcsba ugyanannyiszor kell beérkeznünk, mint ahányszor kimegyünk onnan. Mivel minden bemenő és kimenő él különböző (hiszen minden élen pontosan egyszer haladunk keresztül), ezért az ilyen csúcsok fokszámának párosnak kell lennie, vagyis a gráf minden csúcsának a fokszámának párosnak kéne lennie . Mivel a gráf minden csúcsának a fokszáma páratlan ezért a königsbergi hidak a kívánt módon nem járhatók be. Ha a kezdőpont nem esik egybe a végponttal, akkor két páratlan és két páros fokszámú csúcsnak kéne lennie.

Általánosítsuk a problémát!

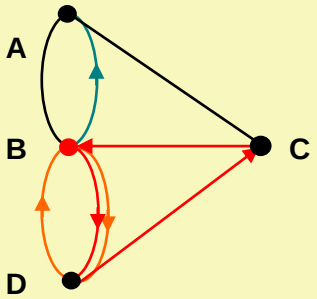
Def.: Egy gráf **összefüggő**, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk egy úton.

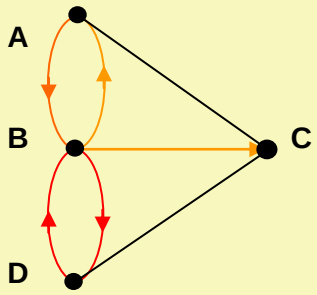
Összefüggő gráf: 

Nem összefüggő gráf : 

Def. **séta**: Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pontok többször is előfordulhatnak.

Például Königsberg városában az B városrészből az A-ba ill. a C-be vezető séták:

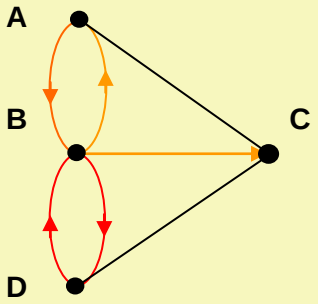




A bejárás: BDCBDBA BDBABC
A bejárás élsorozattal: BD–DC–CB–BD–DB–BA BD–DB–BA–AB–BC

Def.: **Vonal**nak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él legfeljebb egyszer fordulhat elő, de lehetnek olyan pontok, amelye többször is előfordulnak.

Például Königsberg városában az B városrészből a C-be vezető vonal: BD–DB–BA–AB–BC



Def.: Euler-vonalnak nevezzük a gráfban az élek egy olyan egymáshoz csatlakoztatott bejárását, melynek során minden élen pontosan egyszer haladunk keresztül. Ha e bejárás során a kiindulópont megegyezik a végponttal, akkor az Euler-vonal zárt, ha a kiindulópont és a végpont nem azonos, akkor az Euler-vonal nyított.

Nyilvánvaló, hogy egy nem összefüggő gráf nem járható be sem nyílt, sem zárt Euler-vonallal, ezért a továbbiakban az összefüggő gráfokra szorítkozunk.

Tétel: Nyílt Euler-vonal létezésének szükséges feltétele az, hogy két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros legyen. (Magyarul: egy összefüggő gráfban csak akkor lehet nyílt Euler-vonal, ha két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros. De csak lehet! Még nem biztos, hogy van is!)

Biz.:
Ekkor van a bejárásnak egy kiinduló pontja és egy végpontja. Az összes többi ponton ugyanannyiszor kell bemennünk, mint kijönnünk belőle, így ezek fokszáma biztosan páros. A kiindulópontból a kiindulási élen kívül ugyanannyi bemenő, mint kimenő él fut, tehát ennek a pontnak a fokszáma páratlan kell, hogy legyen. A végpont esetében az utolsó (bemenő) élen kívül ugyanannyi bemenő élnek kell lennie, mint kimenő élnek, tehát a végpont fokszáma is páratlan kell, hogy legyen. Tehát valóban: szükséges, hogy két pont fokszáma páratlan, az összes többi pont fokszáma pedig páros kell, hogy legyen. (A bejárás a két páratlan fokszámú pont valamelyikéből indul és a másik páratlan fokszámú pontban ér véget.)

Tétel: Egy összefüggő gráfban a zárt Euler-vonal létezésének szükséges feltétele, hogy minden pont fokszáma páros legyen.

Biz.:
Zárt Euler-vonal esetében minden olyan pontnál, ami nem a kezdő (és vég-) pont, ugyanannyi bemenő, mint kimenő él van, tehát ezeknek a pontoknak a fokszáma páros. A kezdőpont első (kimenő) élén kívül minden a ponton való áthaladás két élt jelent, majd az utolsó (bemenő) éllel együtt a fokszám: 1 + páros + 1 = páros. Vagyis, ha az Euler-vonal zárt, akkor minden élnek páros fokszámúnak kell lennie.

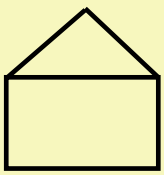
Kimutatható, hogy a feltétel elégséges is, tehát:

Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha minden pont fokszáma páros.
Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros.

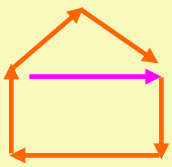
Feladatok:

1. Meg lehet-e egyetlen vonallal rajzolni a köv. ábrákat?

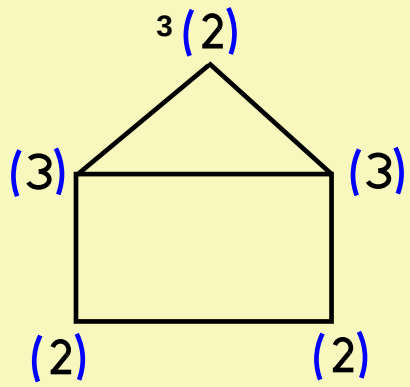
a)



Ezt igen. Pl.:



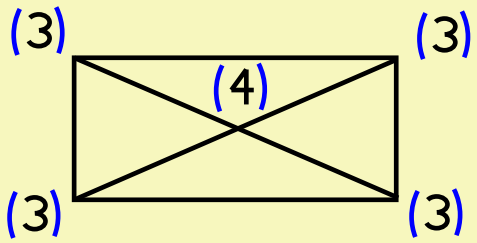
Gráfos mo.:



Igen.

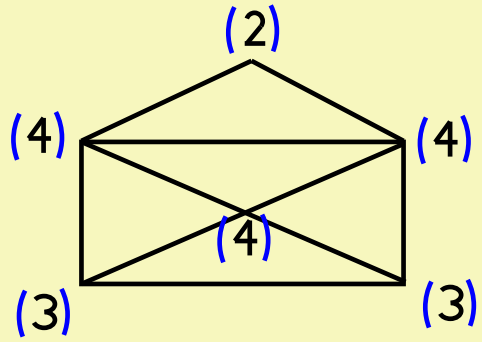
Két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros, a gráfnak van nyílt Euler-vonala.

b) **Nem.**



Kettőnél több páratlan fokú pontja van, tehát nincs nyílt Euler-vonala!

c) **Igen.**

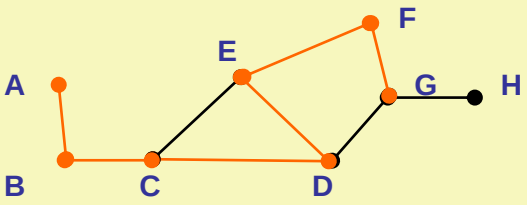


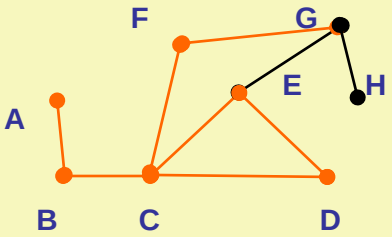
Két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros, a gráfnak van nyílt Euler-vonala.

2. Be lehet-e járni egy alkalmas csúcsból kiindulva egy
a) négy oldalú egyenes gúla;
b) egy tetraéder,
c) egy oktaéder
éleit úgy, hogy minden élen egyszer haladunk végig, és a végén visszatérünk abba a csúcsba, melyből elindultunk? Be lehet-e járni a testek éleit úgy, hogy minden élen egyszer haladunk végig, de nem a kezdőpontban fejezzük be a bejárást?

Megoldás

Def.: Útnak nevezzük a gráf éleinek olyan egymáshoz csatlakoztatott sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

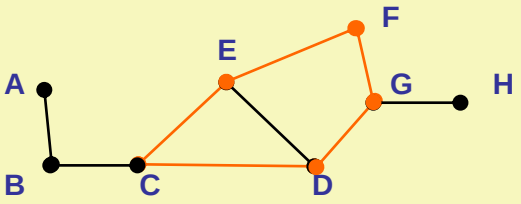


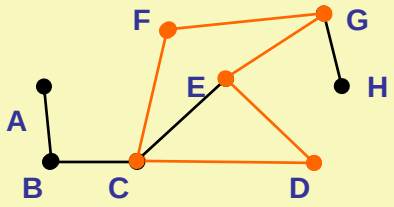


Az AB–BC–CD–DE–EF–FG élsorozat út.
Az AB–BC–CD–DE–EC–CF–FG élsorozat nem út.
Vedd észre! A „ C-D-E-C pontoknál körbementünk.

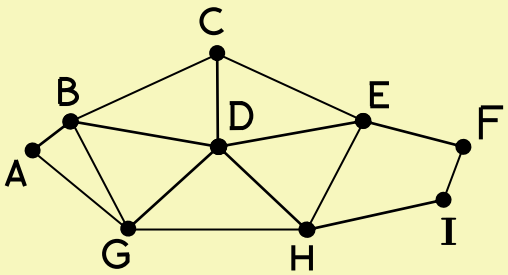
Def.: Körnek nevezzük a gráf éleinek olyan egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben a kiindulási pont megegyezik a végponttal, de minden él és minden más pont legfeljebb egyszer fordul elő.

Köröket láthatunk az alábbi ábrákon.





3.
a) Keressünk utat az ábrán látható gráfban az A és az I pontok között;
b) Keressünk olyan vonalat az A és az I pontok között, amelyik nem út! Keressünk olyan utat, amelynek élei szerepelnek a vonal élei között is;
c) Keressünk olyan sétát az A és az I pontok között, amelyik nem vonal! Keressünk olyan vonalat, amelynek élei szerepelnek a séta élei között;
d) Keressünk kört! Igaz-e, hogy a körnek tetszőleges élét elhagyva a gráf összefüggő marad?
e) Keressünk két különböző utat az A és az I pontok között.



Megoldás

4. Tizenkét fiú levelez. Mindegyik fiú legalább két másikkal tartja a kapcsolatot. Valamelyikük elküld egy hírt az egyik ismerősének. Az is elküldi egy ismerősének, de nem annak, akitől kapta. Más forrásból a fiúk nem jutnak a hírhez.
a) Biztosan eljut-e a hír mindenkihez, mielőtt visszajut egy olyan fiúhoz, aki már tudta?
b) Igaz-e, hogy a hír biztosan visszajut egy olyan fiúhoz, aki már tudta?
c) Legkevesebb hány fiúhoz jut el a hír?

Megoldás

A példa megoldásához hasonlóan bizonyítható a következő tétel:

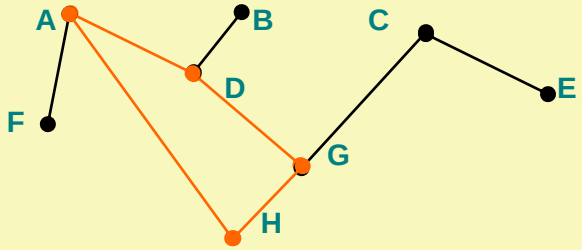
Tétel: Ha egy összefüggő véges gráfban minden pont fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

Következmény: Ha egy összefüggő gráfban nincs kör, akkor van elsőfokú pontja.

A következmény bizonyítása:

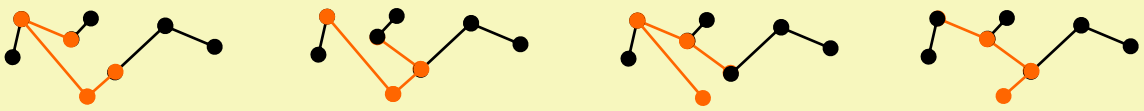
A gráf összefüggő, így nincs nulladfokú pontja. Ha a gráfnak nem lenne elsőfokú pontja, akkor minden pont fokszáma legalább kettő lenne, így a tétel miatt lenne benne kör. Viszont a gráfban nincs kör, ezért van elsőfokú pontja.

Ha egy gráfban van kör, akkor van a gráfban legalább két olyan pont (F és B), amelyeket két különböző úttal is össze lehet kötni, vagyis pl. F-ből két különböző úton is eljuthatunk B-be.



Az egyik út: FAB
A másik út: FAHGDB

A gráf összefüggő marad, ha akármelyik élt elhagyjuk a körből:



Ebből következik az alábbi tétel:

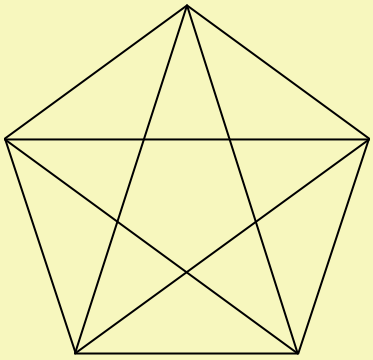
Tétel: Összefüggő gráfban valamely kör bármely élét elhagyva a gráf összefüggő marad.

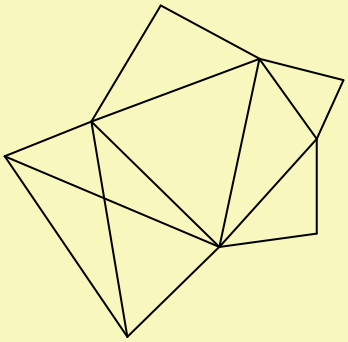
Bizonyítás: Ha a gráf valamely körének két pontját, (pl. F és G) két különböző úttal is összeköthetjük, akkor e kör bármely élét elhagyva továbbra is eljuthatunk P-ből Q-ba (legfeljebb már csak egy úton), vagyis a gráf összefüggő marad.

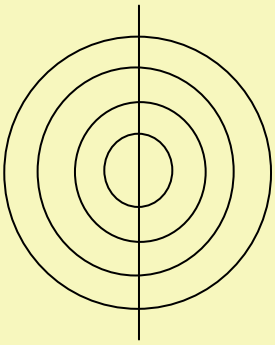
Ellenőrző kérdések:

A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Indokolja meg a válaszát!
a) Ha egy gráf összefüggő, akkor bármely pontjából bármely pontjába vezet séta.
b) Ha egy gráfban van kör, akkor a gráf összefüggő.
c) Ha egy összefüggő gráfban van zárt Euler-vonal, akkor a gráfban van olyan pont, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad.
d) Ha egy gráf összefüggő, akkor van olyan él, amelyet elhagyva összefüggő marad.
e) Ha egy gráfban van olyan él, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad, akkor a gráfban van kör.

Feladat
A következő ábrák közül melyiket lehet a ceruza felemelése nélkül megrajzolni úgy, hogy egyetlen szakaszon se menjünk át egynél többször, és melyiket nem? Miért?







Olvasnivaló: Hamilton-körök