**Izomorf gráfok, részgráfok, komplementer gráfok, körök, fák**

**(Emelt szint)**

**Ha egy problémát gráfokkal modellezünk, akkor a gráfot többféleképpen is felrajzolhatjuk. Természetesen az így készített gráfok pontjai és élei számának, és a megfelelő pontok fokszámának meg kell egyeznie, továbbá ha a problémát modellező gráf­ban valamelyik két pont éllel van összekötve, akkor bármely ugyanezen problémát szemléltető gráfban a megfelelő két pont ugyancsak éllel van összekötve. Ezért érdemes értelmezni a gráfok között egyfajta „egyenlőséget". Az ilyen módon egyező gráfokat izomorf gráfoknak nevezzük.**

**Def.: Két gráfot izomorfnak nevezünk, ha éleik között és csúcsaik között is létezik illeszkedés­tartó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.**

**Ez tehát azt jelenti, hogy ha az egyik gráf A és B csúcsai éllel vannak összekötve, akkor a másik gráf megfelelő A' és B' pontjai is éllel vannak összekötve, mégpedig ugyanannyi éllel, mint az A és B csúcsok. Tehát az izomorf gráfok megfelelő csúcsainak fokszámai megegyeznek.**

**a) b) c) d)**

**A D’ A” B\***

 **B C B’ E’ E” D”**

**A\* C\***

 **D E A’ C’ B” C” D\* E\***

 **Pl. a), b), c) gráfiai izomorfak, de nem izomorfak a d) gráffal (abban ugyanis szerepel az AD él is)**

**Def.: Ha egy gráfnak elhagyjuk néhány élét vagy néhány pontját úgy, hogy ismét gráfot ka­punk, akkor ez utóbbi gráfot az eredeti gráf részgráfjának nevezzük. (Természetesen, ha pontot ha­gyunk el, akkor el kell hagynunk az összes ebbe a pontba futó élt is, hogy gráfot kapjunk.)**

**Külön érdekesek azok a részgráfok, melyek egy gráfot teljes gráffá egészítenek ki.**

**Def.: Azt a gráfot, ami egy n pontú egyszerű gráfot n pontú teljes gráffá egészít ki, az eredeti gráf komp­lementer gráfjának nevezzük.**

**Az n pontú egyszerű gráf komplementerét megkapjuk, ha az eredeti gráfot kiegé­szítjük teljes gráffá, majd töröljük az eredeti gráfhoz tartozó éleit. Ebből következik, hogy az n pontú gráf komplementere is n pontú gráf.**

**Pl.:**

**Természetesen, ha egy n pontú egyszerű gráfnak k db éle van, akkor komplementer gráfjának  db éle van.**

**Az egyszerű gráfok legfontosabb részgráfjai a körök és a fák.**

**Körnek neveztük a gráfban azt az utat, melynek kezdőpontja megegyezik végpontjával.**

 **A B C A gráfban kört alkotnak az**

 **AD-DG-GF-FA és az**

 **D E AD-DG-GH-HA élsorozatok**

**F**

 **G**

 **H**

**Def. A körmentes, összefüggő gráfot fának nevezzük.**

**Pl. Ha az előző gráf köreiből elhagyunk egy-egy megfelelő élt, akkor fagráfot kapunk.**

**A B C**

 **D E**

**F**

 **G**

 **H**

**Tétel: Az n pontú fának pontosan n -1 éle van.**

**Bizonyítás: A tétel bizonyítását teljes indukcióval végezzük.**

**n = 1-re, n = 2-re, n = 3-ra az állítás nyil­vánvaló:**

**Legyen az n olyan természetes szám, melyre az állítás igaz, vagyis amelyre teljesül, hogy a n pontú fagráfnak n - 1 éle van. Az n pontú összefüggő gráfból úgy kapunk n + 1 pontú összefüggő gráfot, hogy valamely pontját összekötjük egy új ponttal.**

**Ezzel az élek száma és a csúcsok száma is eggyel növekedett, vagyis az n + 1 pontú fagráfnak n db éle van. Tehát ha az állítás n csúcsra igaz, akkor n+1 csúcsra is igaz.**

**Következmény:**

**1. Ha egy fa bármely két pontját összekötjük, már lesz benne kör.**

**Ha egy n pontú fagráfnak n –1 éle van,akkor egy újabb él hozzávétele kört hoz létre, mert a fában kezdetben minden pontból minden pontba pontosan egy út vezet (mert nincs benne kör és összefüggő), tehát már egy újabb él behúzásával egy újabb út keletkezne, ami egyúttal kör kialakulását is eredményezi és a gráf nem lesz fa.**

**2.** **Ha egy összefüggő fa bármely élét elhagyjuk, akkor már nem lesz összefüggő (ter­mészetesen az él elhagyásakor annak végpontjait is elhagyjuk), hiszen ezzel a fa két részfává esik szét.**

**Tehát az n pontú összefüggő gráfok közül a fának van a legkevesebb éle, vagyis a fa a maximális élszámú körmentes gráf.**

**FELADATOK**

**1. Van-e olyan n pontú egyszerű gráf, amelyik izomorf a komplementerével, ha a) n = 5 b) n = 6.**

**Megoldás**

**2. Van-e olyan fagráf, melynek komplementere is fagráf?**

**Megoldás**

**3. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan n pontú egyszerű gráf, mely komplementerével izomorf, ha a) n = 4k+2 b) n = 4k + 3**

**Megoldás**

**4. Mutasson példát olyan n pontú egyszerű gráfra, melybe 10 új élt berajzolva teljes gráfot kapunk!**

**Megoldás**

**5. Igazolja, hogy bármely összefüggő gráf néhány (véges sok) új él berajzolásával olyan gráffá alakítható, melynek van**

**a) Nyílt Euler-vonala**

**b) Zárt Euler-vonala.**

**Megoldás**

**6. Tizenkét fiatal chatel egymással. Minden kölyök legalább két másikkal levelezik. Egyikük elküld egy hírt az egyik partnerének, aki azt tovább küldi valamelyik partne­rének, de nem annak, akitől kapta.**

**a) Biztosan eljut-e a hír mind a 12 fiatalhoz?**

**b) Igaz-e, hogy a hír biztosan visszajut egy olyan fiatalhoz, aki már tudta?**

**c) Legkevesebb hány fiatalhoz jut el a hír?**

**Megoldás**

**7. Egy n pontú fagráf komplementerének 2n + I éle van. Határozza meg n értékét!**

**Megoldás**

**8. Az alábbi gráfok közül melyek azok, amelyek lerajzolhatók a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden szakaszon csak egyszer menjünk át?**

**Megoldás**

**9. Egy 10 pontú teljes gráf csúcsai egy kör mentén helyezkednek el. Hány olyan kör van ebben a gráfban, amelyben nincsenek egymást metsző élek?**

**10. Egy társaságban (ahol mindkét nemből egynél többen voltak) a lányok és fiúk először külön váltak; minden lány minden lánnyal, és minden fiú minden fiúval koccintott egyszer. Így a lá­nyok közötti koccintások száma 6-tal volt több, mint a fiúk közötti koccintások száma. Éjfélkor aztán a fiúk és a lányok összevegyültek; ekkor mindenki mindenkivel koccintott egyszer. Hány koccintás hallatszott éjfélkor?**

**Megoldás**

**Olvasnivaló: Hamilton-körök**