A tökéletes számok

Szakdolgozat

Karlik Zsuzsanna

kémia-matematika szakos hallgató

ELTE TTK

Témavezető:

Dr. Freud Róbert

egyetemi docens

ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom célja a tökéletes számokról és hozzájuk hasonló számokról minél több ismeret összegyűjtése, rendszerezése. Azért választottam ezt a témát, mert annak ellenére, hogy több mint kétezer éve foglalkoztatja a matematika iránt érdeklődőket, még mindig sok a vele kapcsolatos megoldatlan probléma. Annak ellenére, hogy mindössze néhány képviselőjüket találták meg eddig, mégis sok tulajdonságukat ismerjük. Sőt, például a páratlan tökéletes számokról azt sem tudjuk, hogy léteznek-e, mégis tételeket tudunk megfogalmazni és bebizonyítani velük kapcsolatban.

Dolgozatomban összegyűjtöttem a tökéletes számok felfedezésének, megismerésének történetével kapcsolatos információkat. A páros tökéletes számok képletének levezetése után azok tulajdonságaival foglalkoztam. Ezek bizonyítását önállóan készítettem el. Egy részüket kiterjesztettem minden tökéletes számra, azaz a páratlanokra is, ha léteznek. Ezután a páratlan tökéletes számokkal szembeni követelményeket mutattam be bizonyítással együtt. Majd a bővelkedő és hiányos számokkal kapcsolatos tételek következtek, melyek bizonyításainak nagy részét szintén önállóan végeztem. Ezt követik az egyéb érdekes számok, melyek egy részénél csak a definíciót és egy-két példát írtam, mivel ezekről nem sokat tudunk, de részletesebben írtam a szupertökéletes számokról és a barátságos számpárokról. A bizonyítások egy része itt is önálló munka. Ezután röviden írtam a GIMPS-projektről és ezzel kapcsolatban arról, hogy miért is foglalkoznak annyian a Mersenne-prímek és a tökéletes számok keresésével, tulajdonságaik vizsgálatával.

Az utolsó fejezetben a tökéletes számok iskolai felhasználásával foglalkoztam, részletesen bemutattam egy általam elképzelt, ezzel a témával foglalkozó középiskolai szakköri óra menetét. Arról is írtam, hogy miként teremthető meg a matematikának más tantárgyakkal való kapcsolata ezen a témán keresztül. Ez a fejezet teljesen a saját munkám.

A dolgozat elkészítéséhez magyar és külföldi (angol nyelvű) szakirodalmat is felhasználtam: könyveket, folyóiratcikkeket és internetes oldalakat.

2. Történetük

Görögök

Nem tudjuk, hogy pontosan mikor fedezték fel a tökéletes számokat, de valószínűleg már az egyiptomiak is ismerték őket. Több mint 500 évvel időszámításunk kezdete előtt azonban már biztosan foglalkoztak velük. Ekkor élt Püthagorasz görög politikus és vallásalapító, aki nagy fontosságot tulajdonított a számoknak. Az általa létrehozott szekta, a Püthagoreus-kör többek között számmisztikával is foglalkozott. Úgy gondolták, hogy mindennek alapja a szám, a világ számokból épül föl. Nem meglepő, hogy a valamilyen szempontból különleges tulajdonságú számok, mint például a tökéletes számok, felkeltették érdeklődésüket. Ők azonban leginkább misztikus tulajdonságaikat tartották fontosnak, számelméleti jellegzetességeikkel nem foglalkoztak. Azt gondolták, hogy a 6 ,,részeinek integritása és a benne rejlő egyezség következtében a házasság és az igazság és a szépség" jelképe.

Az első, tökéletes számokkal foglalkozó, ma ismert írás Eukleidész Elemek című műve. A tizenhárom könyvből álló, kb. i.e. 300 körül keletkezett műben szerzője összegezte, rendszerezte kora matematikai ismereteit. Bár az Elemek főleg geometriával foglalkozik, VII-IX. könyve aritmetikai ismereteket tartalmaz. A VII. könyv elején szereplő definíciók közül az utolsó mondja ki, hogy ,,Egy szám tökéletes, ha egyenlő az osztói összegével." Fontos megjegyezni, hogy a görögök nem sorolták egy szám osztói közé magát a számot, a definícióban tehát magánál a számnál kisebb osztókról van szó. A görögök négy tökéletes számot ismertek, melyek a következők:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Az Elemek aritmetikai részének legutolsó tétele megmutatja, hogyan találhatunk tökéletes számokat:

„IX. 36. Tétel *Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.*"

A tétel részletes bizonyítása is megtalálható ugyanitt.

A püthagoraszi iskola egyik későbbi képviselője, az i. sz. 1. század végén élt Nikomakhosz Geraszénosz volt a következő, akinek meghatározó elmélete maradt fenn a tökéletes számokkal kapcsolatban. Bevezetés a számelméletbe (Introductio Arithmetica) c. könyvében a páros számokat három csoportra osztotta:

- *bővelkedő számok:* a szám részeinek összege nagyobb magánál a számnál
- *hiányos számok:* a szám részeinek összege kisebb magánál a számnál
- *tökéletes számok:* a szám részeinek összege éppen egyenlő magával a számmal

A számok ezen csoportjaihoz morális gondolatokat is fűzött:

„Az egyszerű páros számok közül néhány bővelkedő, mások hiányosak: ez a két osztály egymásnak szélsőséges ellentétei; azokat, amelyek e kettő között középen helyezkednek el, tökéletesnek hívják. És azok, amelyeket egymással szemben állónak hívnak, a bővelkedők és a hiányosak, tulajdonságaikban megosztottak, mely egyenlőtlenséghez vezet, a túl sokhoz és a túl kevéshez."

„A túl sok esetében többlet, fölöslegesség, túlzás és túlkapás keletkezik, a túl kevés esetében hiány, mulasztás, szűkölködés és elégtelenség. És azok

esetében, amelyek a túl kevés és a túl sok között találhatóak, vagyis egyenlőségben, erény, helyes mérték, illendőség, szépség és hasonló dolgok keletkeznek, melyekre a legjobb példa az a típusú szám, amelyet tökéletesnek hívnak."

Ezeken túl biológiai analógiákat is felsorol a különböző esetekre, a bővelkedő számokat többek között tíz szájú, a hiányos számokat pedig egy szemű állatokhoz hasonlítja.

Írásában azonban számelméleti tulajdonságok is szerepelnek, mindenféle bizonyítási kísérlet nélkül. Így történhet, hogy több állításáról is kiderült már, hogy hibás, másokról viszont még ma sem tudjuk, igazak-e.

Állításai:

(i) az n-edik tökéletes szám n jegyű

(ii) minden tökéletes szám páros

(iii) minden tökéletes szám felváltva 6-ra és 8-ra végződik

(iv) Eukleidész tökéletes számok generálására vonatkozó algoritmusa (azaz $2^{k-1}(2^k-1)$, ahol $k > 1$ és 2^k-1 prím) minden tökéletes számot megad

(v) végtelen sok tökéletes szám van

Állításait valószínűleg az addig ismert négy tökéletes számra és az Eukleidész által leírt előálllítási módra alapozta. Annak ellenére, hogy nem bizonyította őket, évekig mindenki tényként kezelte azokat, bár (i) és (iii) állítása valójában hamis, a másik háromról pedig ma sem tudjuk, hogy igaz-e (bár a (iv) állítása igaz, ha figyelembe vesszük, hogy Nikommakhosz azt gondolta, csak páros tökéletes számok vannak).

A tökéletes számoknak vallásos jelentőséget is tulajdonítottak. Mint Szent Ágoston is írja Az Isten városáról c. művében, Isten azért teremtette hat nap alatt a Földet (bár egy pillanat alatt megtehette volna), mert a hat tökéletes szám. A Hold is hasonló okból kerüli meg a Földet éppen 28 nap alatt. Yorki Alcuin teológus azt is kifejtette, hogy az emberi faj második eredete a 8-as számhoz kötődik, mivel Noé bárkáján 8 olyan élőlény volt, melyektől az egész emberiség származik. Mivel a 8 hiányos szám (nála kisebb osztóinak összege kisebb magánál a számnál), az emberiség második eredete kevésbé tökéletes mint az első. Egy olasz könyvben a 6-ot a szerelem istennőjének, Vénusznak tulajdonították, *,,mivel a két nem egyesüléséből keletkezik, vagyis a triádból, amely hímnemű, mert páratlan, és a diádból, amely nőnemű, mert páros"*.

Arabok

Az arabokat is elbűvölték a tökéletes számok. Ibn Kurra például azt vizsgálta, hogy $2^n p$ mikor tökéletes, ibn Al-Haiszam pedig leírta, hogy bizonyos feltételeket kielégítő tökéletes számok $2^{k-1}(2^k-1)$ alakúak, ahol 2^k-1 prím.

Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus tanulmányt írt Nikomakhosz műve alapján, melyben átveszi a görög matematikus csoportosítási elvét, de miszticizmus nélkül foglalkozik azzal. Ő meg is adott tíz tökéletes számot, melyek közül az első hét valóban tökéletes, és megegyezik a hét legkisebb tökéletes számmal.

Európa

A 16. században a matematika reneszánszát élte Európában. Az arabok munkásságát nem ismerték, Nikomakhosz feltételezéseit pedig mindenki igaznak fogadta el. Sokan még azt is hitték, hogy a $2^{k-1}(2^k-1)$ képlet minden k páratlan számra tökéletes számot ad.

Már a 15. században felfedezték az ötödik és a hatodik tökéletes számot. 1536-ban jelent meg Hudalrichus Regius *Ultriusque Arithmetices* című műve, melyben szerepel ennek cáfolata, mivel sikerült a $2^{11}-1=2047$-et prímtényezőkre bontania ($2047 = 23 \cdot 89$). Ez volt az első olyan 2^p-1 alakú szám, amely összetett, annak ellenére, hogy p prím. Regius (újra)felfedezte az ötödik tökéletes számot is, mikor megmutatta, hogy $2^{13}-1$ prímszám. Ekkor a megfelelő tökéletes szám $2^{12}(2^{13}-1) = 33550336$ nyolcjegyű, így cáfolja Nikomakhosz első állítását, vagyis azt, hogy az n-edik tökéletes szám n jegyű.

1603-ban Pietro Antonio Cataldi olasz matematikus 800-ig faktorizálta az összes pozitív egész számot és 750-ig megadta mind a 132 prímet. E lista alapján megmutatta, hogy $2^{17}-1=131071$ prím, mert nincs 750-nél kisebb prímosztója és $750^2 = 562500 > 131071$, ezáltal megtalálta a hatodik tökéletes számot ($2^{16}(2^{17}-1) = 8589869056$) és cáfolta Nikomakhosz azon állítását, hogy a tökéletes számok felváltva végződnek 6-ra és 8-ra, hiszen az ötödik és a hatodik is 6-ra végződik. Prímlistája alapján megtalálta a hetedik tökéletes számot is $p=19$-re. E fontos eredményei ellenére Cataldi hamis állításokat is megfogalmazott. Azt írta könyvében, hogy a $2^{p-1}(2^p-1)$ képlet $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$-re tökéletes számot ad. Ebből az első hét eset már ismert volt, a maradék négyből viszont mindössze egy kitevő helyes.

1638-ban René Descartes ezt írta Marin Mersenne francia szerzetesnek szóló levelében:

„Azt hiszem, be tudom bizonyítani, hogy nincs más páros tökéletes szám, csak Eukleidész számai; és azt is, hogy egy páratlan szám nem lehet tökéletes, csak ha egy prímszám és egy négyzetszám szorzatából áll. [...] De bármilyen módszerhez nyúl is valaki, nagyon hosszú időre van szükség ezen számok kereséséhez...”

Pierre de Fermat is sokat foglalkozott a tökéletes számok problémakörével.

Az $a^n - 1$ alakú számok vizsgálatával kezdte, és megállapította, hogy ez csak akkor lesz prím, ha $a = 2$ és n prím. 1640-ben Mersenne-nek írt levelében a következő állításokat sorolta fel:

1. Ha m összetett, akkor $2^m - 1$ is összetett;

2. Ha m prím, akkor $2p|2^m - 2$;

3. Ha m prím, akkor $2^m - 1$ prímosztói $2km + 1$ alakúak, k pozitív egész.

Néhány hónappal később Fermat ezek általánosítását is megfogalmazta egy másik levélben:

Ha p prím és a egész szám nem osztható p-vel, akkor $a^{p-1}-1$ osztható p-vel (kis Fermat-tétel).

A 3. állítás alapján cáfolni tudta Cataldi két állítását, mivel megtalálta $2^{23} - 1$ és $2^{37} - 1$ prímtényezős felbontását.

Fermat eredményei felkeltették Mersenne érdeklődését. 1644-ben megjelent *Cogitata physico-mathematica* című művében megfogalmazott állítása azóta is ámulatba ejti az érdeklődőket. Ebben ugyanis szerepel, hogy $2^p - 1$ prím, ha $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ és minden más 257-nél kisebb kitevőre összetett. Állítását ellenőrizni nem tudhatta, ő maga is ezt írja:

„Ahhoz, hogy egy 15- vagy 20-jegyű számról megállapítsuk, prím-e vagy sem, egy egész élet ideje sem elég.”

Az a meglepő, hogy a 20 és 258 közötti 47 prímszámból csak öt esetében tévedett (az első hibát több, mint 200 évvel később találták meg): $2^{67} - 1$ és $2^{257} - 1$ összetett, míg $2^{61} - 1$, $2^{89} - 1$ és $2^{107} - 1$ prím. (Sokan azzal védik Mersenne-t, hogy listájában a 67 valószínűleg sajtóhiba, és valójában 61-et akart írni, de ezt nem tudhatjuk.)

Mersenne tiszteletére a $2^p - 1$ alakú prímeket Mersenne-prímeknek nevezzük.

1732-ben érte el a következő nagy eredményt Leonhard Euler svájci matematikus. 125 év szünet után megtalálta a következő tökéletes számot $p = 31$-re. Néhány évvel később pedig cáfolta Cataldi utolsó hamis állítását, mikor megmutatta, hogy $2^{29} - 1$ nem prím.

Publikálatlan kéziratában Euler bebizonyította Eukleidész tételének megfordítását, vagyis azt, hogy egy páros tökéletes szám mindig $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú ($2^p - 1$ prím).

Ezenkívül foglalkozott a páratlan tökéletes számok létezésének kérdésével is. Sikerült bebizonyítania Descartes állítását, sőt, még többet is. Belátta, hogy egy páratlan tökéletes szám csak $(4n+1)^{4k+1}b^2$ alakú lehet, ahol $4n+1$ prím.

Ezután több, mint 150 évig nem találtak a $2^{30}(2^{31} - 1)$-nél nagyobb tökéletes számot, és voltak, akik azt gondolták, hogy soha nem is fognak. Peter Barlow például azt írta 1811-ben, hogy ez a tökéletes szám *,,a legnagyobb, amelyet valaha felfedeznek; mivel ezek a számok csupán érdekesek, de semmi hasznuk nincs, nem valószínű, hogy bárki megpróbál majd nagyobbat találni".* Barlow azonban tévedett, a tökéletes számok iránti érdeklődés azóta sem csökkent.

A kutatás folytatódik

François Edouard Anatole Lucas francia matematikus fedezte fel az első hibát Mersenne listájában 1876-ban. Anélkül, hogy megtalálta volna a prímtényezőit, megmutatta, hogy a $2^{67}-1$ nem prím. E szám faktorizálását Frank Cole végezte el 1903-ban, miután éveken keresztül minden vasárnapját ennek a problémának szentelte. Az Amerikai Matematikai Társaság (American Mathematical Society) találkozóján tartott előadást, mely abból állt, hogy csöndben kiment a táblához és kiszámolta a közönség előtt a $2^{67} - 1$ értékét, majd elvégezte a $193707721 \cdot 761838257287$ szorzást. A kettőnek ugyanaz lett az eredménye. A matematikatörténet egyetlen feljegyzett szótlanul megtartott előadása után Cole csöndben visszaült a helyére, miközben a közönség lelkesen tapsolt.

Lucas ezenkívül egy prímtesztet is megalkotott, mely később - Lehmer által módosított változatában - a Mersenne-prímek számítógépes keresésének alapjává vált.

1876-ban Lucas azt is bebizonyította, hogy $2^{127} - 1$ is prím (a tizenkettedik Mersenne-prím). Ez a legnagyobb Mersenne-prím, amelyet a modern számítógépek segítsége nélkül találtak, és 75 éven keresztül ez volt a legnagyobb ismert prímszám.

Lucas eredménye alapján Catalan azt a következtetést vonta le, hogy ha $m = 2^p - 1$ prím, akkor $2^m - 1$ is prím. Ha ez igaz lenne, akkor tudnánk, hogy végtelen sok Mersenne-prím, és így végtelen sok tökéletes szám létezik, ezt azonban nem tudjuk bizonyítani.

Pl. $p = 2, 3, 7$-re igaz az állítás, de $p = 2^{127} - 1$ olyan nagy szám, hogy a $2^p - 1$ prím voltának ellenőrzése már lehetetlennek tűnik.

A 19. század végén Pervusion és Seelhoff egymástól függetlenül megmutatta, hogy $2^{61}-1$ prímszám, majd a 20. század elején Powers bebizonyította, hogy a $2^{89} - 1$ és $2^{107} - 1$ is prím, Kraitchik pedig cáfolta $2^{257} - 1$ prím voltát. Ezzel minden hibát megtaláltak Mersenne listájában.

A páratlan tökéletes számokkal kapcsolatban is folytatódtak a kutatások. Sikerült bebizonyítani, hogy ha létezik páratlan tökéletes szám, akkor annak legalább 8 különböző prímtényezője van, és legalább 29 nem feltétlenül különböző prímosztója. Azt is tudjuk, hogy az egyik prímtényezőnek 10^6-nál nagyobbnak kell lennie, maga a páratlan tökéletes szám pedig legalább 300 jegyű.

Barátságos számok

A pitagoreusok a 220-at és a 284-et a barátság szimbólumának tekintették, mivel az egyik szám részeiből összeáll a másik, azaz mindkét szám önmagánál kisebb osztóinak összege a másik számot adja.

A 220 a Bibliában is szerepel, amikor a Teremtés Könyvében Jákob ajándékokkal próbálja kiengesztelni Ézsaút, többek között ,,Kétszáz kecskét, és húsz bakot; kétszáz juhot, és húsz kost" ad neki, mely Ézsau iránti szeretetét fejezi ki.

A középkorban is fontos szerepet játszott ez a számpár a horoszkópokban és a talizmánokon. Azt gondolták, hogy ha egy talizmánon a 220 vagy a 284 szerepelt, akkor annak tulajdonosa szerencsés lesz a szerelemben.

A következő barátságos számpárt (17296, 18416) csak több, mint kétezer év múlva, 1636-ban találta meg Fermat. Descartes-tal együtt felfedeztek egy - az arabok által már a 9. század óta ismert - szabályt, melynek segítségével elő lehet állítani bizonyos típusú barátságos számpárokat, és Descartes ennek segítségével talált egy harmadik párt is (9 363 584, 9 437 056). Ezeket a számpárokat is már régóta ismerték az arabok.

A 18. században Euler 64 újabb számpárt fedezett fel, melyek közül kettőről azonban kiderült, hogy valójában barátságtalanok.

1830-ban Adrien Marie Legendre talált egy újabb számpárt.

1867-ben egy 16 éves olasz, B. Nicolo I. Paganini lepte meg a világot azzal, hogy észrevette, az 1184 és az 1210 barátságos számpár. Bár valószínűleg csak találgatással lelt rájuk, nevét beírta a matematika történetébe.

Ma már a barátságos számok keresésénél is számítógépeket használnak.

Mind a tökéletes, mind a barátságos számokkal kapcsolatban számos kérdésre nem tudjuk még a választ. E problémák a megfelelő fejezetekben szerepelnek.

3. A páros tökéletes számok alakja

A páros tökéletes számok tehát azok a pozitív egész számok, melyek valódi osztóinak összege egyenlő a számmal, így összes osztójának összege a szám kétszerese, azaz $\sigma(n) = 2n$.

Eukleidész szerint ,,*Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.*"

Vagyis már a görögök is tudták, hogy az $(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1})2^k = (2^k - 1)2^{k-1}$ alakú számok tökéletes számok, ha $2^k - 1$ prím. Ez pedig akkor teljesül, ha k prím (ekkor $2^k - 1$ Mersenne-prím).

Euler óta pedig azt is tudjuk, hogy az összes páros tökéletes szám ilyen alakú.

3.1. Tétel: Egy n páros szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím, és így p is prím.

3.1. Bizonyítás: Először lássuk be, hogy az ilyen alakú számok tökéletes számok.

Ha $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, akkor $2^p - 1$ prím volta miatt

$$\sigma(n) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot \frac{(2^p - 1)^2 - 1}{(2^p - 1) - 1} = (2^p - 1)2^p = 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) = 2n,$$

tehát az állítás ezen iránya igaz.

Ezután még azt kell belátnunk, hogy egy páros tökéletes szám csak ilyen alakú lehet.

Tegyük fel, hogy n páros tökéletes szám, azaz $n = 2^k t$, ahol $k \geq 1$ egész, t páratlan, valamint $\sigma(n) = 2n$.

(1) $\qquad \sigma(n) = \sigma(2^k t) = \sigma(2^k)\sigma(t) = (2^{k+1} - 1)\sigma(t) = 2^{k+1}t = 2n$

(2) $\qquad (2^{k+1}-1)\sigma(t) = 2^{k+1}t$

Vonjunk ki az egyenlőség mindkét oldalából $(2^{k+1}-1)t$-t!

(3) $\qquad (2^{k+1}-1)(\sigma(t)-t) = t$

Emiatt $\sigma(t)-t$ osztója t-nek. Mivel t is osztója t-nek, és e két osztó összege $\sigma(t)-t+t=\sigma(t)$, vagyis megegyezik t összes osztójának összegével, ezért t-nek nem lehet több osztója. Vagyis t biztosan prím.

A (2) egyenlőség alapján $2^{k+1}-1$ osztója $2^{k+1}t$-nek, és mivel páratlan, biztosan osztója t-nek. Ekkor viszont $2^{k+1}-1=t$ teljesül, hiszen t-nek csak az 1 és önmaga osztója, és $k \geq 1$ esetén $2^{k+1}-1>1$. Így valóban igaz az, hogy minden páros tökéletes szám $2^k(2^{k+1}-1)$ alakú, ahol $2^{k+1}-1$ prím, így $k+1=p$ is prím. Tehát a páros tökéletes számok $2^{p-1}(2^p-1)$ alakúak.

A kettőhatványokkal való kapcsolatuk miatt felmerülhet a kérdés, hogy vajon kettes számrendszerben milyen alakjuk van a páros tökéletes számoknak. Nézzük meg az első néhány számra:

$$6_{10} = 110_2$$

$$28_{10} = 11100_2$$

$$496_{10} = 111110000_2$$

Úgy tűnik, hogy kettes számrendszerben a páros tökéletes számok valahány darab 0-ból és eggyel több 1-esből állnak.

Nézzük meg általánosan!

$$2^{p-1} = 1\underbrace{0\ldots0}_{p-1\ db}{}_2$$

$$2^p - 1 = 1\underbrace{0\ldots0}_{p\ db}{}_2 - 1_2 = \underbrace{1\ldots1}_{p\ db}{}_2$$

$$2^{p-1}(2^p-1) = 1\underbrace{0\ldots0}_{p-1\ db}{}_2 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{p\ db}{}_2 = \underbrace{1\ldots1}_{p\ db}\underbrace{0\ldots0}_{p-1\ db}{}_2$$

Tehát a $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú páros tökéletes számok kettes számrendszerben p darab 1-esből és $p-1$ darab 0-ból állnak.

4. Mersenne-prímek

4.1. Definíció: A $2^p - 1$ (p pozitív prím) alakú prímszámokat Mersenne-prímeknek nevezzük.

Az ilyen alakú számok nem minden prímkitevőre prímek, a legkisebb olyan p, amelyre össszetett számot kapunk, a 11, hiszen $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Tehát a páros tökéletes számok egy kettőhatvány és egy Mersenne-prím szorzataként állnak elő.

Marin Mersenne 17. századi francia szerzetes, matematikus és fizikus éppen a páros tökéletes számok kutatása miatt keresett ilyen típusú prímeket.

5. A páros tökéletes számok tulajdonságai

5.1. Utolsó jegyük

5.1.1. Tétel: A páros tökéletes számok 6-ra vagy 8-ra végződnek

5.1.1. Bizonyítás:

Egy szám végződése a szám 10-zel osztva adott maradéka, vizsgáljuk tehát modulo 10 a $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú számokat (p pozitív egész).

p	$2^{p-1} \pmod{10}$	$2^p-1 \pmod{10}$	$n \pmod{10}$
1	1	1	1
2	2	3	6
3	4	7	8
4	8	5	3
5	6	1	6
6	2	3	6

$2^5 \equiv 2^1 \pmod{10}$, ezért $p = 6$-tól 2^{p-1} értékei ismétlődnek, $2^k \equiv 2^l \pmod{10}$, ha $k \equiv l \pmod 4$. Ugyanígy $2^p - 1$ értékei is ismétlődnek négyesével, hiszen itt a kettőhatványoknál eggyel kisebb számokat vesszük, tehát azok periodikus ismétlődése miatt a náluk eggyel kisebb számok is ugyanúgy viselkednek.

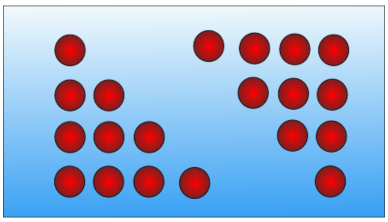
Így minden páratlan p-re (vagyis ha $p \equiv \pm 1 \pmod 4$)$2^{p-1}(2^p-1)$ 8-ra vagy 6-ra végződik, vagyis minden 2-nél nagyobb prímkitevőre is ($p = 2$-re pedig $2^{p-1}(2^p-1) = 6$), így a páros tökéletes számokra is igaz az állítás.

5.2. Háromszögszámok

A pitagoreusok geometriailag modellezték a számokat, így alakult ki a figurális számok elmélete, vagyis az olyan egész számoké, amelyekkel megegyező mennyiségű kavicsot, golyót, stb. valamilyen szabályos alakban ki lehetett rakni. Közülük a legismertebbek a négyzetszámok, de ők foglalkoztak például téglalapszámokkal és háromszögszámokkal is.

5.2.1. Definíció: A $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{R}$ alakban felírható számokat háromszögszámoknak nevezzük.

Ugyanis ha elkezdünk kavicsokat rakosgatni úgy, hogy az első sorba egy kavicsot teszünk, alá a második sorba kettőt úgy, hogy minden kavics egyenlő távolságra legyen a mellette és fölötte lévőktől, és így folytatjuk (az n-edik sorba n darab kavicsot rakva), akkor a kavicsok egy szabályos háromszög alakját adják ki.



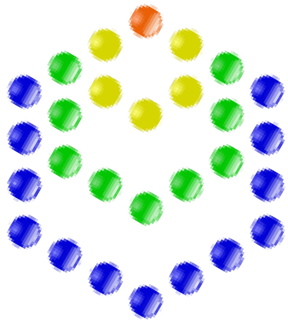
http://isallaboutmath.files.wordpress.com/

2008/04/triangular5.png?w=447&h=248

Nem nehéz belátni, hogy a tökéletes számok egyben háromszögszámok is. Ha ugyanis n tökéletes szám, akkor $n = 2^{p-1}(2^p - 1) = \dfrac{2^p(2^p-1)}{2}$, és a $k = 2^p - 1$ helyettesítéssel éppen a háromszögszámok képletét kapjuk.

5.3. Hatszögszámok

Azokat a számokat, amelyek értékének megfelelő számú kavicsból kirakhatók a $0, 1, 2, \ldots, k$ oldalhosszúságú szabályos hatszögek egymásba illesztve úgy, hogy egy csúcsuk és az ebből induló két oldalegyenesük egybeesik, hatszögszámoknak nevezzük.



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/
thumb/9/9b/Hexagonal_number_28_as_sum_of_gnomons.svg/
106px-Hexagonal_number_28_as_sum_of_gnomons.svg.png

Az első néhány hatszögszám: 1, 6, 13, 28, ...

5.3.1. Tétel: A hatszögszámok a $k(2k-1)$ alakú számok, $k \in \mathbb{N}$.

5.3.1. Bizonyítás:

Az első "hatszög" 1 pontból áll. A második a $6 \cdot 1$-ből, a harmadik a $6 \cdot 2$-ből, stb. (az oldalak hossza mindig eggyel nő. A k-adik a $6 \cdot (k-1)$-ből.

Ez összesen $1 + 6(1 + 2 + ... + (k-1))$ pont.

Amikor azonban ezeket egymásba rajzoljuk úgy, hogy egy csúcsuk egybeessen és két oldaluk is ugyanarra az egyenesre essen, akkor azt az egy csúcsot k-szor számoltuk, ezért $k-1$-et le kell vonnunk az összegből. Ezenkívül a harmadik hatszög berajzolásakor a csúcson kívül már szerepel két oldalának 1-1 pontja, a negyedik hatszög berajzolásakor már 2-2 pont szerepel a csúcson kívül, stb., a k-adik berajzolásakor már $6(k-2)$ pont ott van, ezért ezeket is le kell vonni. Így a pontok száma összesen:

$$1+6(1+2+\ldots+(k-1))-(k-1)-2(1+2+3+\ldots+(k-2))=$$

$$\begin{aligned}&=4(1+2+\ldots+(k-1))+1+(k-1)=\\&=4\cdot\frac{k(k-1)}{2}+k=\\&=2k^2-2k+k=2k^2-k=k(2k-1).\end{aligned}$$

A tökéletes számok hatszögszámok is, hiszen a $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú számokból $k=2^{p-1}$ helyettesítéssel éppen a hatszögszámok képletét kapjuk.

5.4. Páratlan köbszámok összege

5.4.1. Tétel: A 6 kivételével minden páros tökéletes szám előáll az első valahány páratlan köbszám összegeként.

5.4.2. Bizonyítás: Az első n darab köbszám összege: $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Az első $2k+1$ darab köbszám összege:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(2k+1)^3=\frac{(2k+1)^2(2k+2)^2}{4}.$$

Vonjuk ki ebből a páros köbszámok összegét, és akkor megkapjuk az első $k+1$ darab páratlan köbszám összegét.

Az 1 és $2k+1$ közötti páros köbszámok összege:

$$2^3+4^3+\ldots+(2k)^3=$$

$$=(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+\ldots+(2k)^3=$$

$$= 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) =$$
$$= 8 \cdot \frac{k^2(k+1)^2}{4} = 2k^2(k+1)^2.$$

Így az első $k+1$ páratlan köbszám összege:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2k+1)^3 =$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2k)^3 + (2k+1)^3) - (2^3 + 4^3 + \ldots + (2k)^3) =$$
$$= \frac{(2k+1)^2(2k+2)^2}{4} - 2k^2(k+1)^2 =$$
$$= \frac{4(2k+1)^2(k+1)^2}{4} - 2k^2(k+1)^2 =$$
$$= (2k+1)^2(k+1)^2 - 2k^2(k+1)^2 =$$
$$= ((2k+1)^2 - 2k^2)(k+1)^2 =$$
$$= (4k^2 + 4k + 1 - 2k^2)(k+1)^2 =$$
$$= (2k^2 + 4k + 1)(k+1)^2$$

A páros tökéletes számok alakja $(2^p - 1)2^{p-1}$.

Legyen $2^{p-1} = (k+1)^2$. Ekkor

$$2^{\frac{p-1}{2}} = k + 1,$$

és így

$$k = 2^{\frac{p-1}{2}} - 1.$$

Ekkor

$$2k^2 + 4k + 1 = 2(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)^2 + 4(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) + 1 = 2^p - 2^{\frac{p+3}{2}} + 2 + 2^{\frac{p+3}{2}} - 4 + 1 = 2^p - 1.$$

Vagyis

$$(2^p - 1)2^{p-1} = (2k^2 + 4k + 1)(k+1)^2 = 1^3 + 3^3 + ldots + (2k+1)^3,$$

azaz az első $k + 1 = 2^{\frac{p-1}{2}}$ darab páratlan köbszám összege.

A 6-ra azért nem teljesül az állítás, mert $6 = (2^2 - 1)2^{2-1}$, ezért $k = 2^{\frac{2-1}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$ nem egész szám.

5.5. Boldog számok

Adjuk össze egy szám számjegyeit, majd az így kapott szám jegyeit is, és ezt folytassuk addig, amíg az összeg egyjegyű nem lesz! Ha az eljárás végén 1-et kapunk eredményül, akkor az eredeti számot boldog számnak nevezzük.

5.5.1. Tétel: A 6-nál nagyobb páros tökéletes számok boldog számok.

5.5.1. Bizonyítás: Egy szám és a számjegyeinek az összege 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, ezért az eljárás végén kapott egyjegyű szám az eredeti szám 9-es maradéka. Így csak azt kell belátnunk, hogy a 6-nál nagyobb páros tökéletes számok 9-cel osztva 1 maradékot adnak.

Legyen n páros tökéletes szám, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, ahol p páratlan prímszám ($p = 2$-re kapjuk éppen a 6-ot).

Vizsgáljuk meg a két tényező kilences maradékainak segítségével n maradékait!

p	$2^{p-1} \pmod 9$	$2^p - 1 \pmod 9$	$n \pmod 9$
1	1	1	1
2	2	3	6
3	4	7	1
4	8	6	3
5	7	4	1
6	5	0	0
7	1	1	1

$p = 7$ -től kezdve ismétlődnek a maradékok, mert $(2, 9) = 1$, így $2^{\phi(9)} = 2^6 \equiv 1 \pmod 9$. Látható, hogy minden páratlan p-re n 9-cel osztva 1-et ad maradékul, tehát az állítás igaz.

Más források szerint egy szám akkor boldog, ha a számjegyeinek négyzetösszegéből kapott szám jegyeinek négyzetösszegét véve, és a kapott számmal az eljárást folytatva, végül 1-et kapunk.

Ebben az esetben azonban nem olyan egyszerű a dolog, mert azzal, hogy egy egyjegyű számhoz jutunk, még nem minden esetben ér véget az eljárás. Például, ha 2-t kapunk, azt négyzetre emelve 4 lesz az eredmény, ha pedig a 4-et emeljük négyzetre, akkor 16-ot kapunk, amellyel tovább folytathatjuk az eljárást.

Az 1 esetében nincs ilyen probléma, hiszen $1^2 = 1$, tehát az eredmény nem változik. Ugyanez igaz a nullára is, de bármely nullánál nagyobb szám jegyeinek négyzetösszege nagyobb lesz nullánál, ezért ezzel nem is kell foglalkozni.

Egy- és kétjegyű számokra a jegyek négyzetösszegének levezetése a dolgozat végén a Függelék II.-ben található, itt csak a végeredményt közlöm.

Egyjegyű számoktól indulva a következőkre jutunk:

$$1 \to 1$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 9 \to 4$$
$$4 \to 4$$
$$5 \to 4$$
$$6 \to 4$$
$$7 \to 1$$
$$8 \to 4$$
$$9 \to 4$$

Minden pozitív egész szám jegyeinek négyzetét összeadva, majd a kapott szám jegyeivel folytatva az eljárást, végül mindig 1-et vagy 4-et kapunk. Az 1-gyel tovább folytatva, mindig 1-et kapunk, a 4-gyel folytatva pedig:

$4^2 = 16$

$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$

$$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$$
$$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$
$$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$
$$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$$
$$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$
$$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$$

Vagyis visszajutunk a 4-hez, más egyjegyű szám érintése nélkül.

A függelékben található annak a megmutatása, hogy minden kétjegyű számnál egyjegyűre vezet az eljárás.

Háromjegyű számoknál a lehető legnagyobb négyzetösszeget a 999-nél kapjuk, $9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$, vagyis ennél nagyobb nem lehet a háromjegyű számok négyzetösszege. 243-ig viszont a lehető legnagyobb négyzetösszeg a 199-é, amely $1^2 + 9^2 + 9^2 = 163$. Eddig a legnagyobb négyzetösszeg a 159-é: $1^2 + 5^2 + 9^2 = 107$, amelyre viszont a jegyek négyzetösszege $1^2 + 7^2 = 50$, és ez már kétjegyű számra vezet, tehát háromjegyűeknél biztosan csökkenés tapasztalható az eljárással.

A háromnál több jegyű számok esetén a jegyek négyzetösszege kevesebb számjegyből áll, mint az eredeti szám, hiszen még a legnagyobb n-jegyű számra, $\underbrace{9\ldots9}_{n\ db}$-re is teljesül, hogy a jegyek négyzetösszege legfeljebb $n-1$ jegyű:

$$n \cdot 9^2 = 81n < 100n < 10^{n-1}$$

Hiszen $n = 4$-re igaz: $100 \cdot 4 = 400$ és $10^3 = 1000$, és a 10^x függvény meredeksége $x \geq 4$-re nagyobb, mint a $100x$ függvényé.

Ez azt jelenti, hogy minden, ilyen értelemben boldogtalan (= nem boldog) számra a végeredmény 4 lesz.

Ebben az értelemben a tökéletes számok $p = 3, 5, 7$-re boldogok, de $p = 13, 17, 19$-re nem. Nem lehet egyszerűen eldönteni, hogy melyek lesznek boldogok és melyek nem. Például

28-ra ($p = 3$): $2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

de 33550336-ra ($p = 13$): $3^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 0^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 =$

$= 9 + 9 + 25 + 25 + 0 + 9 + 9 + 36 = 122$

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \to 4$

5.6. Reciprokösszegük

Nézzük meg először a páros tökéletes számokra!

5.6.1. Tétel: A páros tökéletes számok osztóinak reciprokösszege 2.

5.6.1. Bizonyítás: Mivel a páros tökéletes számok alakja

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

ahol p és $2^p - 1$ prím, nem nehéz felsorolni az osztóit, melyek:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-1}, 2^p - 1, 2(2^p - 1), 2^2(2^p - 1), \dots, 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Ezek reciprokösszege:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p - 1} + \frac{1}{2(2^p - 1)} + \frac{1}{2^2(2^p - 1)} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}(2^p - 1)}.$$

Mivel minden nevezőben n egy osztója szerepel, hozzuk közös nevezőre a törteket. A nevező így n lesz, a számlálóban pedig minden osztó osztópárja szerepel, vagyis n minden osztója megjelenik pontosan egyszer, tehát a tört:

$$\frac{2^{p-1}(2^p - 1) + 2^{p-2}(2^p - 1) + \ldots + (2^p - 1) + 2^{p-1} + 2^{p-2} + \ldots + 1}{n}.$$

Mivel a számláló n osztóinak összege ($\sigma(n)$) és n tökéletes szám, ezért ez az összeg $2n$-nel egyenlő, vagyis a tört:

$$\frac{2n}{n} = 2$$

És ez volt az eredeti állítás.

Ugyanez általánosan is igaz, vagyis nemcsak a páros, hanem a páratlan tökéletes számokra is (ha léteznek egyáltalán páratlan tökéletes számok).

5.6.2. Tétel: Az n tökéletes szám osztóinak reciprokösszege 2.

5.6.2. Bizonyítás: Az

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{d(n)}}$$

összeg értékét keressük. Hozzuk a törteket közös nevezőre. Mivel minden tört nevezője n osztója, és n összes osztója szerepel, a legkisebb közös nevező maga n lesz. Ekkor viszont a számlálóban mindig a nevezőbeli osztó osztópárja szerepel, vagyis a számláló n osztóinak összege lesz:

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_{d(n)}}{n} = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$

Az állítás fordítottja is igaz:

5.6.3. Tétel: Ha egy szám osztóinak reciprokösszege 2, akkor a szám tökéletes.

5.6.3. Bizonyítás:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{d(n)}} = 2$$

Az előző bizonyításhoz hasonlóan az osztópárok miatt:

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_{d(n)}}{n} = \frac{\sigma(n)}{n} = 2$$

A nevezővel való beszorzás után: $\sigma(n) = 2n$, vagyis a szám valóban tökéletes.

Tehát összefoglalva: egy pozitív egész szám osztóinak reciprokösszege pontosan akkor 2, ha a szám tökéletes.

5.7. Harmonikus számok

5.7.1. Definíció: Egy n szám osztóinak harmonikus közepe:

$$H(n) = \frac{d(n)}{\frac{1}{d_1} + \ldots + \frac{1}{d_{d(n)}}}$$

ahol $d_1, \ldots, d_{d(n)}$ az n összes osztója.

5.7.2. Definíció: Egy számot harmonikus számnak vagy Ore-számnak nevezünk, ha osztóinak harmonikus közepe egész szám.

Nézzük először ismét csak a páros tökéletes számokra!

5.7.3. Tétel: Minden páros tökéletes szám harmonikus.

5.7.3. Bizonyítás: Láttuk, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokösszege mindig 2, vagyis $H(n)$ képletében a nevezőben 2 szerepel.

Mivel a páros tökéletes számokra $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, ahol $2^p - 1$ prímszám, osztóinak száma:

$$d(n) = ((p-1)+1) \cdot 2 = 2p$$

Ekkor $H(n) = \dfrac{2p}{2} = p$, amely egész szám, tehát a tökéletes számok valóban harmonikusak.

Ez az állítás is igaz a páratlan tökéletes számokra is.

5.7.4. Tétel: Minden n páratlan tökéletes szám harmonikus.

5.7.4. Bizonyítás: Mivel a páratlan tökéletes számok osztóinak reciprokösszege 2, osztóik harmonikus közepe $H(n) = \dfrac{d(n)}{2}$, vagyis csak azt kell belátni, hogy minden páratlan tökéletes számnak páros sok osztója van.

A páratlan tökéletes számok minden osztója is páratlan. Ha páratlan sok osztójuk lenne, akkor azok összege is páratlan lenne, vagyis nem lehetne az összeg az eredeti szám kétszerese. Így a páratlan tökéletes számok osztóinak száma is páros.

Ha pedig $d(n)$ minden n páratlan tökéletes számra páros, akkor $H(n) = \frac{d(n)}{2}$ egész szám, vagyis minden páratlan tökéletes szám harmonikus.

Mivel beláttuk a páros és a páratlan tökéletes számokra is az állítást, ezért igaz az, hogy minden tökéletes szám harmonikus szám is.

6. Páratlan tökéletes számok

Míg páros tökéletes számokat már az ókori görögök is ismertek, a mai napig senkinek sem sikerült páratlan tökéletes számot találni, sőt, azt sem tudjuk, hogy léteznek-e egyáltalán. Ennek ellenére sokat tudunk arról, hogy ha léteznek, akkor milyen tulajdonságokkal rendelkeznek.

6.1. Tétel: Ha létezik egy n páratlan tökéletes szám, akkor

a, $n = s^2p$, ahol $p = 4k + 1$ prím;

b, $n \equiv 1 \pmod{12}$ vagy $n \equiv 9 \pmod{36}$.

6.1. Bizonyítás:

a)

Legyen $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}$, q_i páratlan prím, $i = 1, \dots r$.

Ekkor

$$\sigma(n) = (1 + q_1 + \ldots + q_1^{\beta_1}) \ldots (1 + q_r + \ldots + q_r^{\beta_r}) = 2n,$$

ahol n páratlan, ezért $\sigma(n)$ páros, de nem osztható 4-gyel, tehát prímtényezős felbontásában pontosan egy 2-es lehet.

Ez azt jelenti, hogy az $(1 + q_i + \ldots + q_i^{\beta_i})$ tényezők közül pontosan egy páros (de 4-gyel nem osztható), a többi pedig páratlan. Mivel n páratlan, így minden q_i és azok minden hatványa páratlan, ezért egy tényező akkor lesz páratlan, ha páratlan sok tagból áll, vagyis β_i páros egy kivételével minden i-re. Legyen q_r a kivétel, vagyis β_r legyen páratlan, vagyis $\beta_r = 2k+1$. Ekkor a β_r páros részét leválaszthatjuk, így $n = (q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r - 1}) q_r$, ahol minden β_i kitevő páros $(i = 1, \dots, r-1)$ és $\beta_r - 1$ is páros, vagyis q_r kivételével n négyzetszámok szorzata, $n = s^2 q_r$. Legyen $q_r = p$, ekkor $n = s^2 p$.

Tegyük fel, hogy p egy $4k - 1$ alakú prím. Ekkor

$$p \equiv -1 \pmod{4}$$

$$p^{2l} \equiv +1 \pmod 4$$

$$p^{2l+1} \equiv -1 \pmod 4,\ l \in \mathbb{N}$$

Így $\sigma(n)$-ben

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{\beta_r} \equiv 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots - 1 = 0 \pmod 4,$$

és így

$$\sigma(n) \equiv 0 \pmod 4,$$

ami nem lehet, mert

$$\sigma(n) \equiv 2 \pmod 4.$$

Ezért p csak $4k + 1$ alakú lehet.

Ezzel beláttuk az állítás a) részét.

b)

Vizsgáljuk külön n 4-gyel, ill. 3-mal osztva adott maradékát. Kezdjük a 4-gyel.

Mivel $p \equiv 1 \pmod 4$, $p^{\beta_r} \equiv 1 \pmod 4$ is teljesül.

A $q_1, \ldots, q_{r-1}$ prímtényezők n-ben páratlanok és kitevőik párosak. Így $q_i \equiv \pm 1 \pmod 4$ és $q_i^{\beta_i} \equiv +1 \pmod 4$, $i = 1, \ldots, r - 1$.

Emiatt szorzatuk, vagyis n is 1-gyel kongruens modulo 4.

Most vizsgáljuk a 3-mal való oszthatóságot.

Ha n valamelyik prímtényezője 3 (és ez nem lehet p, mert $3 \neq 4k + 1$, akkor az páros kitevőn szerepel, vagyis n nemcsak 3-mal, hanem 9-cel is osztható, és mivel 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, $n \equiv 9 \pmod{36}$.

Ha n prímtényezői között nem szerepel a 3, akkor $q_i \equiv \pm 1 \pmod 3$, $i = 1, 2, ..., r - 1$, és mivel β_i páros, $q_i^{\beta_i} \equiv +1 \pmod 3$, és a szorzatuk is 1 maradékot ad hárommal osztva. Így n ugyanannyi maradékot ad 3-mal osztva, mint p.

$$(1+p+p^2+...+p^{\beta_r}) = (1+p)(1+p^2+p^4+...+p^{\beta_r-1})|\sigma(n) = 2n$$

Ha p egy $3k-1$ alakú prím lenne, akkor $3|p+1$, és így $3|\sigma(n) = 2n$, vagyis $3|n$ lenne. Ez viszont ellentmond annak, hogy n prímtényezői között nem szerepel a 3.

Tehát p $3k+1$ alakú, és így n is 1 maradékot ad 3-mal (és 4-gyel) osztva, vagyis $n \equiv 1 \pmod{12}$.

6.2. Tétel: Tetszőleges s-hez legfeljebb véges sok páratlan tökéletes szám van, amelynek s különböző prímtényezője van.

6.2. Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy van olyan s, amelyre végtelen sok páratlan tökéletes szám fordul elő s különböző prímtényezővel.

Ekkor vannak olyan prímszámok, amelyek ezek közül csak véges soknak osztói, és olyanok is, amelyek végtelen soknak. Ez utóbbiak között is vannak olyanok, amelyek végtelen sok tökéletes szám felbontásában ugyanazon a kitevőn szerepelnek, és olyanok is, amelyek nem.

Legyen p_1 olyan prímszám, amely a páratlan tökéletes számok közül végtelen soknak a felbontásában szerepel, ráadásul mindegyikben azonos (k_1) hatványkitevőn (ha létezik ilyen prím). Válasszuk ki ezeket a tökéletes számokat. Keressünk egy következő prímet (p_2), amely a kiválasztott számok tényezői között végtelen sokszor szerepel ugyanazon hatványon (k_2). Ezt az eljárást folytassuk tovább, amíg csak találunk ilyen prímtényezőket. Ez az eljárás véges sok lépésben befejeződik, hiszen maguk a számok véges értékűek, de ha végtelen sok közös prímtényező szerepelne a felbontásukban, akkor végtelen nagyok lennének a számok is.

Ezután az így kiválasztott számok prímtényezői között keressünk olyat (q_1), amely végtelen sok szám felbontásában szerepel, de nem mindegyikben azonos hatványon, és csak azokat tökéletes számokat tartsuk meg, amelyekben ez szerepel. A megmaradt számok között folytassuk ezt az eljárást, amíg lehetséges. Ez is véges sok lépés után véget ér, az előző okból kifolyólag.

A megmaradt páratlan tökéletes számok:

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

Az i-edik szám prímtényezős felbontása:

$$n_i = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_{i1}} \ldots q_l^{\beta_{il}} r_{i1}^{\gamma_{i1}} \ldots r_{im}^{\gamma_{im}},$$

ahol $k + l + m = s$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Mivel különböző tökéletes számokról van szó, semelyik két szám felbontásában nem lehet $l = m = 0$, ezenkívül $\beta_{i1}, ..., \beta_{il}$, ill. $r_{i1}, ..., r_{im}$ közül egyik sem szerepelhet végtelen sokszor. Ebből következik, hogy bármely K valós számnál kisebb β_{ij}-ből és r_{ih}-ból csak véges sok lehet, vagyis ha i elég nagy, akkor β_{ij} és r_{ih} nagyobb lesz K-nál.

Mivel n_i tökéletes szám:

$$2 = \frac{\sigma(n_i)}{n} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1^{\alpha_1}(p_1 - 1)} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k^{\alpha_k}(p_k - 1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{q_1^{\beta_{i1}+1} - 1}{q_1^{\beta_{i1}}(q_1 - 1)} \cdot \ldots \cdot \frac{q_l^{\beta_{il}+1} - 1}{q_l^{\beta_{il}}(q_l - 1)} \cdot \frac{r_{i1}^{\gamma_{i1}+1} - 1}{r_{i1}^{\gamma_{i1}}(r_{i1} - 1)} \cdot \ldots \cdot \frac{r_{im}^{\gamma_{im}+1} - 1}{r_{im}^{\gamma_{im}}(r_{im} - 1)}$$

Alakítsuk át a törteket:

$$\frac{q_j^{\beta_{ij}+1} - 1}{q_j^{\beta_{ij}}(q_j - 1)} = \frac{q_j - \frac{1}{q_j^{\beta_{ij}}}}{q_j - 1}, \ j = 1, 2, \ldots, l$$

Mivel β_{ij} minden határon túl nő, ha i minden határon túl nő, ezért

$$\frac{1}{q_j^{\beta_{ij}}} \longrightarrow 0,$$

így a tört határértéke:

$$\frac{q_j}{q_j - 1}.$$

Kicsit másképp átalakítva a harmadik típusú tényezőket:

$$\frac{r_{ih}^{\gamma_{ih}+1}-1}{r_{ih}^{\gamma_{ih}}(r_{ih}-1)} = \frac{1-\frac{1}{r_{ih}^{\gamma_{ih}+1}}}{1-\frac{1}{r_{ih}}}$$

Ha i minden határon túl nő, akkor r_{ih} is, ezért a számláló és a nevező második tagja is nullához tart, az egész tört pedig 1-hez:

$$\frac{1-\frac{1}{r_{ih}^{\gamma_{ih}+1}}}{1-\frac{1}{r_{ih}}} \longrightarrow \frac{1}{1} \longrightarrow 1$$

Ezek alapján

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} \longrightarrow \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1^{\alpha_1}(p_1-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k^{\alpha_k}(p_k-1)} \cdot \frac{q_1}{q_1-1} \cdot \ldots \cdot \frac{q_1}{q_1-1}.$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy:

$$2p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot (q_1-1) \cdot \ldots \cdot (q_l^{\beta_i l}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{(p_1-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{(p_k-1)} \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_l.$$

Az egyenlőség mindkét oldalán egész kifejezések szorzatai állnak, ezért $q_1, \ldots, q_l$ osztói a jobb oldalnak. Legyen közülük q_1 a legnagyobb. Ekkor $q_1 > (q_j - 1)$, így $q_1 \nmid (q_j - 1)$ minden $j = 1, \ldots, l$, és mivel q_1 különbözik $p_1, \ldots, p_k$ prímtől, ezért azoknak sem lehet osztója.

Tehát az indirekt feltétel ellentmondásra vezetett, vagyis igaz az eredeti tétel.

E feltételeken kívül azt is tudjuk, hogy ha léteznek páratlan tökéletes számok, akkor azok nagyobbak 10^{300}-nál és legalább nyolc különböző prímosztójuk van.

7. Bővelkedő és hiányos számok

7.1. Definíció: Egy pozitív egész számot bővelkedőnek nevezünk, ha osztóinak összege nagyobb a szám kétszeresénél, azaz $\sigma(n) > 2n$.

Másképp megfogalmazva egy szám bővelkedő, ha a nála kisebb osztóinak összege nagyobb a számnál.

Bővelkedő szám például a 12, mert a nála kisebb osztóinak összege
$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$.

7.2. Tétel: Minden bővelkedő szám többszöröse is bővelkedő.

7.2. Bizonyítás: Elég azt belátni, hogy ha n bővelkedő, akkor pn is bővelkedő, ahol p prímszám, mert egy összetett számmal való szorzás értelmezhető prímszámokkal való szorzások sorozataként.

Vizsgáljuk először azt, amikor p és n relatív prímek. Ekkor $\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) > p\sigma(n) > p \cdot 2n = 2(pn)$, vagyis pn valóban bővelkedő.

Most nézzük azt az esetet, ha n és p nem relatív prímek, vagyis $p|n$. Ekkor $n = p^k n^*$, ahol $p \nmid n^*$. Így $pn = p^{k+1}n^*$, ahol $(p^{k+1}, n^*) = 1$.

Ekkor

$$\sigma(pn) = \sigma(p^{k+1}n^*) = \sigma(p^{k+1})\sigma(n^*) > p^{k+1}\sigma(n^*) > p^{k+1}2n^* = 2(p^{k+1}n^*) = 2(pn).$$

7.3. Tétel: (Goldbach-típusú tulajdonság) Minden 46-nál nagyobb páros szám felírható két bővelkedő szám összegeként.

7.3. Bizonyítás: Legyen $n > 46$ páros szám, és írjuk fel $n = 20m + r$ alakban (m pozitív egész, $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$).

Állítsuk elő n-et $a + b$ alakban, ahol a a 20-nak többszöröse, vagyis biztosan bővelkedő, hiszen a 20 bővelkdedő ($\sigma(20) - 20 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 =$ $= 22 > 20$).

n	a	b	$\sigma(b)-b$	$feltétel$
$20m$	$20(m-1)$	20	22	–
$20m+2$	$20(m-2)$	42	54	$m>2$
$20m+4$	$20(m-1)$	24	33	$m>1$
$20m+6$	$20(m-3)$	66	78	$m>3$
$20m+8$	$20(m-2)$	48	76	$m>2$
$20m+10$	$20(m-1)$	30	42	$m>1$
$20m+12$	$20m$	12	16	–
$20m+14$	$20(m-2)$	54	66	$m>2$
$20m+16$	$20(m-1)$	36	55	$m>1$
$20m+18$	$20m$	18	21	–

Ezek után már csak azokat a 46-nál nagyobb számokat kell ellenőrizni, amelyek az m-re vonatkozó feltétel miatt kimaradtak. Ezek:

$$66 = 12 + 54$$

$$48 = 12 + 36$$

$$54 = 30 + 24$$

Tehát valóban minden 46-nál nagyobb páros szám felírható két bővelkedő szám összegeként.

7.4. Definíció: Egy pozitív egész számot hiányosnak nevezünk, ha osztóinak összege kisebb a szám kétszeresénél, azaz $\sigma(n) < 2n$.

Másképp fogalmazva egy szám hiányos, ha a nála kisebb osztóinak összege kisebb magánál a számnál.

Például hiányos szám a 15, mert a nála kisebb osztóinak összege: $1 + 3 + 5 = 9 < 15$.

7.5. Tétel: Minden prímszám hiányos.

7.5. Bizonyítás: Egy p prímszámnak pontosan 2 osztója van, 1 és p. Ezek összege $1 + p < 2p$, hiszen minden prímszám nagyobb 1-nél.

7.6. Tétel: Minden kettőhatvány hiányos.

7.6. Bizonyítás: Ha $n = 2^k$, akkor $\sigma(n) = \dfrac{2^{k+1}-1}{2-1} = 2^{k+1} - 1 <$ $< 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2n$.

Nem csak a 2 hatványaira, hanem bármely prímhatványra igaz ugyanez.

7.7. Tétel: Minden p prímre p^k hiányos.

7.7. Bizonyítás: Bizonyítsunk teljes indukcióval.

$k = 1$-re már beláttuk az állítást.

Tegyük fel, hogy $k = m$-re igaz.

Nézzük meg $k = m + 1$-re, kihasználva az indukciós feltételt:

$\sigma(p^{m+1}) = 1+p+p^2+...+p^m+p^{m+1} < 2p^m+p^{m+1} \leq p^{m+1}+p^{m+1} = 2p^{m+1}$.

Tehát valóban minden prímhatvány hiányos szám.

7.8. Tétel: Ha egy n páratlan számnak csak két különböző prímosztója van, akkor n hiányos, azaz ha $n = p^r q^s$, akkor $\sigma(n) < 2n$.

7.8. Bizonyítás:

7.8.1. Segédtétel: Minden páratlan prímhatvány osztóinak összege kisebb, mint a prímhatvány $\frac{4}{3}$-szorosa, ha a prím 3-nál nagyobb, azaz $\sigma(p^k) < \frac{4}{3}p^k$, ahol $p > 3$ páratlan prím.

7.8.1. Bizonyítás: Használjunk teljes indukciót!

$k = 1$-re igaz az állítás, mert $\sigma(p) = 1 + p < 0,3p + p = 1,3p < \frac{4}{3}p$, ha $p > 3$.

Tegyük fel, hogy $k = m$-re igaz az állítás.

Ekkor $k = m + 1$-re:

$$\sigma(p^{m+1}) = 1+p+p^2+...+p^m+p^{m+1} = \sigma(p^m)+p^{m+1} < \frac{4}{3}p^m+p^{m+1} < \frac{4}{3}p^{m+1},$$

ha

$$\frac{4}{3}p^m < \frac{1}{3}p^{m+1},$$
$$\frac{4}{3} < \frac{1}{3}p,$$
$$4 < p.$$

Ez pedig minden 3-nál nagyobb prímszámra teljesül.

7.8.2. Segédtétel:

$$\sigma(3^r) < 1,5 \cdot 3^r$$

7.8.2. Bizonyítás:

$$\sigma(3^r) = \frac{3^{r+1}-1}{3-1} = \frac{3 \cdot 3^r - 1}{2} = 1,5 \cdot 3^r - 0,5 < 1,5 \cdot 3^r$$

7.8. Bizonyítás:

1. $p, q > 3$

$$\sigma(n) = \sigma(p^r q^s) = \sigma(p^r)\sigma(q^s) < \frac{4}{3}p^r \cdot \frac{4}{3}q^s = \frac{16}{9}p^r q^s < 2p^r q^s = 2n$$

2. n egyik prímosztója 3. Legyen $p = 3$ és $q > 3$.

$$\sigma(n) = \sigma(p^r q^s) = \sigma(3^r p^s) = \sigma(3^r)\sigma(q^s) < \frac{3}{2} \cdot 3^r \cdot \frac{4}{3}q^s = 2 \cdot 3^r q^s = 2n$$

7.9. Tétel: Egy hiányos számnak végtelen sok bővelkedő többszöröse és végtelen sok hiányos többszöröse van.

7.9. Bizonyítás: Ha egy hiányos számot megszorzunk egy bővelkedő számmal, akkor mindig bővelkedő számot kapunk, hiszen bővelkedő szám minden többszöröse is bővelkedő. Így végtelen sok bővelkedő többszöröst kaphatunk.

Ha n hiányos szám, akkor $\sigma(n) < 2n$, vagyis $2n - \sigma(n) = d > 0$. Ha n-et egy elég nagy, n-et nem osztó prímszámmal szorozzuk meg, akkor a szorzat is hiányos lesz, ugyanis

$$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) = (1+p)\sigma(n) =$$

$$= \sigma(n) + p\sigma(n) = (2n-d) + p(2n-d) < 2pn.$$

Az egyenlőtlenség teljesül, ha $2n - d < pd$, átrendezve $\frac{2n}{d} - 1 < p$. Tehát ha elég nagy prímmel szorzunk meg egy hiányos számot, akkor valóban hiányos lesz a szorzat is.

7.10. Tétel: Egy hiányos szám minden osztója is hiányos.

7.10. Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy az n hiányos számnak létezik nem hiányos d osztója. Ekkor d vagy tökéletes vagy bővelkedő.

Ha d bővelkedő, akkor egy bővelkedő számnak van hiányos többszöröse (n), amely ellentmond 7.2-nek.

Ha d tökéletes, akkor d osztóinak összege: $a_1 + a_2 + \dots + a_s = 2d$.

Ha $n = db$, akkor n osztói között biztosan szerepel az 1 és $a_1b, a_2b, \dots, a_sb$, melyek összege

$$a_1b + a_2b + \dots + a_sb = 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_s)b = 1 + 2db = 1 + 2n,$$

vagyis n néhány osztójának összege nagyobb $2n$-nél, ezért n bővelkedő, ami ellentmondás.

Ezzel az eredeti állítást beláttuk.

7.11. Tétel: Egyetlen tökéletes számnak sincs tökéletes többszöröse.

7.11. Bizonyítás: Legyen n tökéletes szám és m tetszőleges pozitív egész, $n|m$, így $m = kn$, $(k > 1)$ egész.

Ekkor $\sigma(n) = d_1 + d_2 + ... + d_{d(n)} = 2n$ ($d_1, ..., d_{d(n)}$ az n szám összes pozitív osztója).

$m = kn$-nek biztosan osztója $kd_1, ..., kd_{d(n)}$ és az 1, de lehet még más osztója is. Vagyis $\sigma(m) = \sigma(kn) = kd_1 + ... + kd_{d(n)} + 1 + ... =$
$= k(d_1 + ... + d_{d(n)}) + 1 + ... = k \cdot 2n + 1 + ... > 2kn = 2m$, vagyis m bővelkedő, tehát nem tökéletes.

7.12. Tétel: A tökéletes számok minden osztója hiányos.

7.12. Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy az n tökéletes számnak van bővelkedő vagy tökéletes osztója.

Ha van bővelkedő osztója, akkor ennek az osztónak minden többszöröse is bővelkedő, vagyis n is, ami ellentmondás.

Ha van tökéletes osztója, akkor ennek az osztónak, amely tökéletes, van olyan többszöröse, amely szintén tökéletes, ez viszont ellentmond az előző állításnak.

Tehát egy tökéletes szám osztója sem bővelkedő, sem tökéletes nem lehet, vagyis a tökéletes számok minden osztója hiányos.

7.13. Következmény: Egy tökéletes szám minden többszöröse bővelkedő, hiszen ha egy többszöröse tökéletes lenne, akkor ennek a tökéletes többszörösnek lenne tökéletes osztója, ami ellentmond 7.12-nek, ha pedig hiányos többszöröse lennek, akkor ennek a hiányos számnak lenne tökéletes osztója, ami pedig 7.10-nek mond ellent.

Ezek alapján a 7.3 Tételre (minden 46-nál nagyobb páros szám felírható két bővelkedő szám összegeként) új bizonyítás adható, amely az első bizonyítás logikáját követi, csak 20 helyett a 6 többszöröseiként állítjuk elő az egyik bővelkedő számot. Így a számok előállítása:

Ha $a \equiv 0 \pmod 6$, akkor $a = 6(m-2) + 12$, ahol $m > 3$.

Ha $a \equiv 2 \pmod 6$, akkor $a = 6(m-3) + 20$, ahol $m > 4$.

Ha $a \equiv 4 \pmod 6$, akkor $a = 6(m-6) + 40$, ahol $m > 7$.

Az összeg első tagja azért bővelkedő, mert egy tökéletes szám többszöröse, a második tagokról (12, 20, 40) pedig számolással ellenőrizhető, hogy valóban bővelkedőek.

Ebben az esetben a kikötések nem zárnak ki 46-nál nagyobb számokat, ezért ezzel be is bizonyítottuk az állítást.

8. Egyéb érdekes számok

A tökéletes számokkal való foglalkozás során a matematikusok elkezdtek vizsgálni hasonló tulajdonságokkal rendelkező számokat (például olyanokat, amelyekre bizonyos osztóik összege adja ki magát a számot vagy osztóik összegének vesszük az osztóit, és azok összegeként kapjuk a szám kétszeresét, esetleg osztóinak összege nem a szám kétszeresét, hanem k-szorosát ($k > 2$) adja és olyanokat is, amelyek csak egy hajszálnyival maradnak le a tökéletes jelzőről, mert valódi osztóik összege eggyel kisebb vagy nagyobb náluk.) Ezek vizsgálata is érdekes és kihívást jelentő feladat, így érdemes megismerkedni velük.

8.1. Szupertökéletes számok

8.1.1. Definíció: Az n pozitív egész számot szupertökéletesnek nevezzük, ha $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

8.1.2. Tétel: Egy n páros szám akkor és csak akkor szupertökéletes, ha $n = 2^{p-1}$ alakú, ahol $2^p - 1$ Mersenne-prím.

8.1.2. Bizonyítás:

Először lássuk be, hogy minden ilyen alakú szám szupertökéletes.

$$\sigma(\sigma(2^{p-1})) = \sigma\left(\frac{2^p - 1}{2 - 1}\right) = \sigma(2^p - 1) = 1 + 2^p - 1 = 2^p = 2 \cdot 2^{p-1},$$

tehát ezek a számok valóban megfelelnek a szupertökéletesség feltételeinek.

Ezek után azt kell megmutatnunk, hogy ha egy páros szám szupertökéletes, akkor mindig ilyen alakú.

Legyen $n = 2^k t$, ahol t pozitív páratlan egész szám és $k \geq 1$ egész.

Ekkor $\sigma(\sigma(2^k t)) = 2^{k+1}t$-nek kell teljesülni.

$$\sigma(2^k t) = \sigma(2^k)\sigma(t) = (2^{k+1} - 1)\sigma(t),$$

így $(2^{k+1}-1)\sigma(t)$ és $\sigma(t)$ osztója a $\sigma(2^k t)$-nek, és mivel $k \geq 1$, nem egyenlőek. Ezért

$$2^{k+1}t = \sigma(\sigma(2^k t)) \geq (2^{k+1} - 1)\sigma(t) + \sigma(t) = 2^{k+1}\sigma(t).$$

Ebből viszont következik, hogy $t \geq \sigma(t)$, ami csak $t = 1$ esetén teljesül, különben t osztóinak összege legalább $t + 1$.

Így

$$n = 2^k,$$

$$\sigma(n) = 2^{k+1} - 1,$$

$$\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} = 2n.$$

Mivel $2^{k+1} - 1$-nek két különböző osztója $2^{k+1} - 1$ és 1, és ezek összege 2^{k+1}, ezért nincs is más osztója, vagyis $2^{k+1} - 1$ (Mersenne-)prím.

A páros szupertökéletes számok száma tehát megegyezik a Mersenne-prímek számával, ezért nem tudjuk, hogy végtelen sok van-e belőlük.

Azt sem tudjuk, hogy léteznek-e páratlan szupertökéletes számok, de ha vannak, akkor teljesülni kell rájuk néhány feltételnek:

8.1.3. Tétel: Ha egy páratlan szám szupertökéletes, akkor négyzetszám.

8.1.3. Bizonyítás:

Tegyük fel indirekten, hogy n páratlan szupertökéletes szám, de nem négyzetszám.

Ekkor $\sigma(n)$ páros, mert ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, akkor

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_r + \ldots + p_r^{\alpha_r}),$$

és mivel n nem négyzetszám, van olyan prímtényezője, amely nem páros hatványon szerepel, ezért az egyik tényezőben páros sok páratlan szám összege áll, emiatt az a tényező - és így az egész szorzat is - páros lesz.

Legyen $\sigma(n) = 2^k l$, ahol $k \geq 1$ egész és l páratlan pozitív egész szám. Ekkor

$$\sigma(\sigma(n)) = (2^{k+1} - 1)\sigma(l) = 2n.$$

Ebből következik, hogy $l > 1$, mert $l = 1$ esetén $\sigma(l) = 1$, így
$2^{k+1} - 1 = 2n$ lenne, ami lehetetlen, hiszen baloldalon egy páratlan szám áll, míg jobb oldalon egy páros. Ha viszont $l > 1$, akkor $\sigma(l) > l$.

Mivel $2^{k+1} - 1$ páratlan, $\sigma(l)$-nek párosnak kell lennie, hogy a szorzatuk páros legyen, vagyis $\sigma(l) = 2m$, ahol m páratlan egész, mert n is páratlan.

Így $n = (2^{k+1} - 1)m$, vagyis n-nek két különböző osztója $2^{k+1} - 1$ és m, hiszen n nem négyzetszám. Ezért

$$\sigma(n) \geq (2^{k+1} - 1)m + m = 2^{k+1}m.$$

$l < \sigma(l)$-ből következik, hogy

$$\sigma(n) = 2^k l < 2^k \sigma(l) = 2^{k+1}m,$$

ami ellentmond az előző sornak.

Tehát egy páratlan szupertökéletes számnak valóban négyzetszámnak kell lenni.

8.1.4. Tétel: Egy páratlan prímszám hatványa nem lehet szupertökéletes.

8.1.4. Bizonyítás:

Tegyük fel indirekten, hogy p^α szupertökéletes szám (p páratlan prímszám, $\alpha > 1$ páros szám az előző tétel miatt).

Ekkor

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_s^{\beta_s},$$

ahol q_i pozitív prímszám és $\beta_i > 0$ egész.

$$\sigma(\sigma(p^\alpha)) = (1 + q_1 + \ldots + q_1^{\beta_1}) \ldots (1 + q_s + \ldots + q_s^{\beta_s}) = 2p^\alpha$$

Mivel p páratlan prím, az s tényezős szorzatnak pontosan egy tényezője páros (de néggyel nem osztható), a többi páratlan. Legyen $1 + q_1 + \ldots + q_1^{\beta_1}$ páros, így β_1 páratlan, β_i, $i > 1$ pedig páros.

Mivel minden tényező nagyobb, mint 2, p mindegyiknek osztója, ezért

$$1 + q_i + \ldots + q_i^{\beta_i} = \frac{q_i^{\beta_i+1} - 1}{q_i - 1} \equiv 0 \pmod{p},$$

így

$$q_i^{\beta_i+1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

β_1 páratlan, ezért

$$q_1^{\beta_1+1} - 1 = (q_1^2 - 1)(q_1^{\beta_1-1} + q_1^{\beta_1-3} + \ldots + 1).$$

$$(q_1^2 - 1) = (q_1 - 1)(q_1 + 1),$$

így $(q_1 + 1)$ kiemelhető az első szorzatból. Emiatt $p|q_1 + 1$, vagyis $q_1 \equiv -1 \pmod{p}$.

$$q_1^{\beta_1+1} q_2^{\beta_2+1} \ldots q_s^{\beta_s+1} \equiv (-1)^{\beta_1+1} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \pmod{p}.$$

$$1 \equiv q_1^{\beta_1+1} q_2^{\beta_2+1} \ldots q_s^{\beta_s+1} = q_1 q_2 \ldots q_s (1+p+p^2+\ldots+p^\alpha) \equiv q_1 q_2 \ldots q_s \pmod{p}.$$

Legyen $S = (\beta_2 + 1) \ldots (\beta_s + 1)$ páratlan szám.

Ekkor

$$(q_1 q_2 \ldots q_s)^S \equiv 1^S \equiv 1 \pmod{p}.$$

De ugyanakkor

$$(q_1 q_2 \ldots q_s)^S = q_1^S (q_2^{\beta_2+1})^{(\beta_3+1)\ldots(\beta_s+1)} \ldots (q_s^{\beta_s+1})^{(\beta_1+1)\ldots(\beta_{s-1}+1)} \equiv$$

$$\equiv (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \pmod{p},$$

ami ellentmondás.

8.2. Majdnem tökéletes számok

8.2.1. Definíció: Az n pozitív egészt majdnem tökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n - 1$.

8.2.2. Tétel: A 2-hatványok majdnem tökéletes számok.

8.2.2. Bizonyítás:

$$\sigma(2^k) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1$$

Tehát egyelőre egy páratlan majdnem tökéletes számot ismerünk, a $2^0 = 1$-et, a többi mind páros.

Nem tudjuk, hogy a kettő hatványain kívül vannak-e más majdnem tökéletes számok.

8.3. Kvázitökéletes számok

8.3.1. Definíció: Az n pozitív egészt kvázitökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n + 1$.

Másképp fogalmazva a kvázitökéletes számok azok a számok, amelyek előállnak a nemtriviális osztóik összegeként.

Nem ismerünk kvázitökéletes számokat, és nem is tudjuk, hogy léteznek-e, de van néhány feltétel, amelynek meg kell felelniük:

8.3.2. Állítás: Minden kvázitökéletes szám egy páratlan szám négyzete.

8.3.2. Bizonyítás: Először lássuk be, hogy n minden páratlan prímtényezőjének páros hatványon kell szerepelni.

Legyen $n = 2^k p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, ahol p_i páratlan prímszám, $i = 1, \ldots, r$, $p_i \neq p_j$, ha $i \neq j$.

Ekkor

$$\sigma(n) = \sigma(2^k)\sigma(p_1^{\alpha_1}) \ldots \sigma(p_r^{\alpha_r}) =$$

$$= (2^{k+1} - 1)(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_r}) \ldots (1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{\alpha_r}) = 2n + 1.$$

Egy szorzat pontosan akkor páratlan, ha minden tényezője páratlan.

A $2^{k+1}-1$ biztosan páratlan.

Mivel p_i páratlan, $1+p_i+...+p_i^{\alpha_i}$ összeg minden tagja páratlan, így egy ilyen tényező akkor lesz páratlan, ha páratlan sok tagja van, vagyis ha p_i kitevője páros minden i-re, vagyis n páratlan része négyzetszám.

Tegyük fel, hogy n páros, vagyis $n=2^k n^*$, ahol n^* páratlan négyzetszám, vagyis $n^*=m^2$, ahol m páratlan egész.

$$\sigma(n)=\sigma(2^k m^2)=\sigma(2^k)\sigma(m^2)=(2^{k+1}-1)\sigma(m^2)=2^{k+1}m^2+1$$

$$(2^{k+1}-1)\sigma(m^2)=2^{k+1}m^2+1$$

$$(2^{k+1}-1)(\sigma(m^2)-m^2)=m^2+1$$

Ekkor viszont m^2+1-nek van egy $4r-1$ alakú páratlan osztója $(2^{k+1}-1)$, amelynek biztosan van $4r-1$ alakú prímosztója (mert ha csak $4r+1$ alakú prímtényezői lennének, akkor ő maga is $4r+1$ alakú lenne). De ez az osztó osztója a $2^{k+1}-1$ minden többszörösének, vagyis m^2+1-nek is, ami ellentmondás. Hiszens tegyük fel, hogy

$$m^2 \equiv -1 \pmod{4r-1}.$$

Legyen $4r-1=s$. Ekkor

$$m^{2\frac{s-1}{2}}=m^{s-1}\equiv(-1)^{\frac{s-1}{2}}=-1 \pmod{s}.$$

Vagyis

$$m^{s-1}\equiv -1 \pmod{s}.$$

Így

$$m^s \equiv -m \pmod{s}.$$

Ez azonban ellentmond a kis-Fermat tételnek, mely szerint

$$m^s \equiv m \pmod{s},$$

mivel $s = 4r - 1$ prím.

Már azt is tudjuk, hogy ha léteznek kvázitökéletes számok, akkor 10^{35}-nél nagyobbnak kell lenniük, és legalább 7 különböző prímosztójuk van.

8.4. Áltökéletes számok

8.4.1. Definíció: Azokat a számokat, amelyek előállnak néhány, de nem az összes náluk kisebb osztójuk összegeként, áltökéletes számoknak nevezzük.

Például a 20 áltökéletes szám, mert $20 = 1 + 4 + 5 + 10$, és az $1, 4, 5, 10$ számokon kívül osztója még a 2 is, amely nem szerepel az összegben.

8.4.2. Tétel: Egy áltökéletes szám minden többszöröse is áltökéletes.

8.4.2. Bizonyítás: Legyen n áltökéletes szám, vagyis
$n = d_1 + d_2 + ... + d_r$, ahol $d_i|n$, $d_i \neq n$, $i = 1, ..., r$.

Legyen n egy többszöröse an, $a > 1$ egész. Ekkor $ad_1, ..., ad_r$ az an szám osztói, de kisebbek nála, mert $d_i < n$ és például az 1 nem szerepel köztük, de osztója an-nek. Ekkor $ad_1 + ad_2 + ... + ad_r = a(d_1 + ... + d_r) = an$, tehát an valóban áltökéletes.

8.5. Szorzásra tökéletes számok

8.5.1. Definíció: Az n pozitív egész számot szorzásra tökéletes számnak vagy k-szorosan tökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = kn$, $k \in \mathbb{Z}$.

Például háromszorosan tökéletes szám a 120, mert $\sigma(120) = 3 \cdot 120 = 360$.

A tökéletes számok kétszeresen tökéletesek.

8.6. Unitáriusan tökéletes számok

8.6.1. Definíció: Egy n számnak d unitárius osztója, ha $d|n$ és $(d, \frac{n}{d}) = 1$.

8.6.2. Definíció: Egy szám unitáriusan tökéletes, ha előáll a nála kisebb unitárius osztóinak összegeként.

Az eddig ismert unitáriusan tökéletes számok:

$$6, 60, 90, 87360, 2^{18} \cdot 5^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 109 \cdot 157 \cdot 313.$$

Nem tudjuk, hogy van-e több ilyen tulajdonságú szám is, és ha igen, akkor véges vagy végtelen sok van belőlük, de az a sejtés, hogy csak véges sok van belőlük.

8.7. Barátságos számpárok

8.7.1. Definíció: Az n_1 és n_2 számokat barátságos számpárnak nevezzük, ha

$$\sigma(n_1) = \sigma(n_2) = n_1 + n_2.$$

A legismertebb és legkisebb barátságos számpár a 220 és a 284.

A tökéletes számok önmagukkal barátságosak.

Egyelőre csak azonos paritású barátságos számpárokat találtak, melyek többsége páros.

Néhány szükséges feltétel ellentétes paritású barátságos számpárok létezéséhez:

8.7.2. Tétel: Tegyük fel, hogy n_1 és n_2 barátságos, n_1 páros és n_2 páratlan. Ekkor $n_1 = 2^r M^2$, $r \geq 1$, és $n_2 = N^2$, ahol M és N 1-nél nagyobb páratlan egész számok.

8.7.2. Bizonyítás: Mivel $\sigma(n_1) = \sigma(n_2) = n_1 + n_2$, ezért $\sigma(n_1)$ és $\sigma(n_2)$ is páratlan. De $\sigma(n)$ akkor és csak akkor páratlan, ha n négyzetszám vagy annak a kétszerese, tehát valóban $n_1 = 2^r M^2$, $r \geq 1$ és $n_2 = N^2$, ahol M és N páratlan.

$N > 1$, mert a barátságos számpárok definíciója miatt $n_2 > 1$.

M sem lehet 1, mert $M = 1$ esetén $\sigma(n_1) = 2^{r+1} - 1 =$
$= 2^r + N^2$, vagyis $2^r - 1 = N^2$, de $N^2 \equiv 1 \pmod 4$, viszont $2^r - 1 \equiv 3 \pmod 4$, ami ellentmondás, kivéve $r = 1$ esetén, de ekkor $N = 1$ lenne, és az szintén ellentmondás.

8.7.3. Tétel: Ha $n_1 = 2^r M^2$ és $n_2 = N^2$ ellentétes paritású barátságos számpár, akkor N összetett.

8.7.3. Bizonyítás: Legyen $M = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, ahol p_i páratlan prím, $i = 1, \dots, s$ és tegyük fel indirekten, hogy N prímszám.

Legyenek a_i-k és b olyan pozitív egészek, amelyekre

$$2^{a_i - 1} < p_i < 2^{a_i}$$

$$2^{b-1} < N < 2^b$$

Mivel n_1 és n_2 barátságos:

$$\sigma(n_1) = (2^{r+1}-1)(1+p_1+\ldots+p_1^{2\alpha_1}) \ldots (1+p_s+\ldots+p_s^{2\alpha_s}) = 1+N+N^2 = \sigma(n_2)$$

Növeljük a bal és csökkentsük a jobb oldalt:

$$(2^{r+1} - 1)(1 + 2^{a_1} + ... + 2^{2a_1\alpha_1}) \ldots (1 + 2^{a_s} + \ldots + 2^{2a_r\alpha_s}) > 1 + 2^{b-1} + 2^{2(b-1)}.$$

Így a bal oldal kisebb, mint $(2^{r+1} - 1)2^{2a_1\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot 2^{2a_s\alpha_s+1}$, a jobb oldal pedig nagyobb mint $2^{2(b-1)}$. Ezért

$$(2^{r+1} - 1)2^{2a_1\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot 2^{2a_s\alpha_s+1} > 2^{2(b-1)} = 2^{2b-2}$$

$$2^r \cdot 2^{2a_1\alpha_1+1} \cdot \ldots \cdot 2^{2a_s\alpha_s+1} \geq 2^{2b-2},$$

mert a jobb oldalon egy 2-hatvány áll, és így a bal oldalt helyettesíthetjük a nála nem nagyobb legnagyobb 2-hatvánnyal.

Ekkor

$$r + (2a_1\alpha_1 + 1) + \ldots + (2a_s\alpha_s + 1) \geq 2b - 2$$

$$r+2(a_1\alpha_1+\ldots+a_s\alpha_s)+s\geq 2b-2$$
$$\frac{r+s+2}{2}+a_1\alpha_1+\ldots+a_s\alpha_s\geq b.$$

Ugyanakkor az is igaz, hogy

$$n_1+n_2=\sigma(n_2)$$

$$2^r p_1^{2\alpha_1}\ldots p_s^{2\alpha_s}+N^2=1+N+N^2<1+2^b+N^2$$

$$2^r p_1^{2\alpha_1}\ldots p_s^{2\alpha_s}\leq 2^b$$

Írjuk be minden prímtényező helyére a nála kisebb kettőhatványt:

$$2^r\cdot 2^{2(a_1-1)\alpha_1}\cdot\ldots\cdot 2^{2(a_s-1)\alpha_s}<2^b$$

$$r+2(a_1-1)\alpha_1+\ldots+2(a_s-1)\alpha_s<b$$

$$r+2a_1\alpha_1+\ldots+2a_s\alpha_s-2(\alpha_1+\ldots+\alpha_s)<b$$

Az előzővel együtt:

$$r+2\sum_{i_1}^{s}a_i\alpha_i-2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i<b<\frac{r+s+2}{2}+\sum_{i=1}^{s}a_i\alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^{s}a_i\alpha_i-2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i<\frac{s-r+2}{2}.$$

Bontsuk két esetre!

I. $(p_i,3)=1$, ha $i=1,\ldots,s$.

Így $p_i\geq 5$ és $a_i\geq 3$ (mivel $p_i<2^{a_i}$, és az 5-nél nagyobb legkisebb kettőhatvány a $2^3=8$), ezért

$$s\leq\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i\cdot 3)-2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\leq\sum_{i=1}^{s}\alpha_i a_i-2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i<\frac{s-r+2}{2}$$

$$s+r<2$$

Ez azonban nem teljesülhet.

II. $p_1 = 3$, $a_1 = 2$.

a) $s > 1$

$$\sum_{i=2}^{s} \alpha_i a_i - 2\sum_{i=2}^{s} \alpha_i < \frac{s-r+2}{2}$$

Tudjuk, hogy $a_i \geq 3$, $i = 2, \ldots, s$, ezért

$$\sum_{i=2}^{s} \alpha_i = 3\sum_{i=2}^{s} \alpha_i - 2\sum_{i=2}^{s} \alpha_i \leq \sum_{i=2}^{s} \alpha_i a_i - 2\sum_{i=2}^{s} \alpha_i$$

Így

$$s - 1 \leq \sum_{i=2}^{s} \alpha_i < \frac{s-r+2}{2}$$

$$s + r < 4$$

Mivel $r > 0$ és $s > 1$, ezért $s = 2$ és $r = 1$, vagyis $n_1 = 2 \cdot 3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2}$,

$$\sigma(n_1) = 3\sigma(3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2}) = 1 + N + N^2 = \sigma(n_2),$$

ezért $(N, 3) = 1$. Ugyanakkor

$$\sigma(n_1) = 3\sigma(3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2}) = 2 \cdot 3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_1} + N^2 = n_1 + N^2,$$

vagyis $3|N$, ami ellentmond az előzőeknek.

b) $s = 1$.

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i - 2\sum_{i=1}^{s} \alpha_i < \frac{s-r+2}{2}$$

$$\alpha_1 \cdot 2 - 2 \cdot \alpha_1 < \frac{1-r+2}{2}$$

$$0 < \frac{1-r+2}{2}$$

$$r < 3$$

Tegyük fel, hogy $r = 2$.

$$n_1 = 4 \cdot 3^{2\alpha}$$

Ekkor a barátságos számok definíciója alapján:

$$7(1+3+\ldots+3^{2\alpha}) = (1+2+4)(1+3+\ldots+3^{2\alpha}) = 4\cdot 3^{2\alpha}+N^2,$$

illetve

$$1+N+N^2 = 4\cdot 3^{2\alpha}+N^2.$$

Ebből

$$N = 4\cdot 3^{2\alpha}-1,$$

$$N^2 = (4\cdot 3^{2\alpha}-1)^2 = 16\cdot 3^{4\alpha}-8\cdot 3^{2\alpha}+1.$$

Így

$$7(1+3+\ldots+3^{2\alpha-1})+7\cdot 3^{2\alpha} = 4\cdot 3^{2\alpha}+16\cdot 3^{4\alpha}-8\cdot 3^{2\alpha}+1$$

$$7(1+3+\cdots+3^{2\alpha-1})+11\cdot 3^{2\alpha} = 16\cdot 3^{4\alpha}+1$$

$$7\cdot\frac{3^{2\alpha}-1}{2}+11\cdot 3^{2\alpha} = 16\cdot 3^{4\alpha}+1$$

$$3,5\cdot 3^{2\alpha}-3,5+11\cdot 3^{2\alpha} = 16\cdot 3^{4\alpha}+1$$

$$14,5\cdot 3^{2\alpha} = 16\cdot 3^{4\alpha}+4,5$$

$$14,5\cdot 3^{2\alpha}-16\cdot 3^{4\alpha} = 4,5$$

$$(29-32\cdot 3^{2\alpha})3^{2\alpha} = 9$$

$$0<(\frac{29}{32}-3^{2\alpha})3^{2\alpha} = \frac{9}{32}<1$$

Mivel $3^{2\alpha}>1$, ezért

$$0<\frac{29}{32}-3^{2\alpha}<1$$

$$3^{2\alpha}<\frac{29}{32}$$

$$2\alpha<1$$

Ez azonban nem lehetséges.

Vagyis $r = 1$, $s = 1$.

Ekkor $n_1 = 2p^2$, ahol p prím.

$$\sigma(2p^2) = 3(1 + p + p^2) = 2p^2 + N^2$$

$$p^2 + 3p + 2 = N^2 - 1$$

$$(p + 1)(p + 2) = (N - 1)(N + 1)$$

Ha $p > N$, akkor a bal oldal nagyobb a jobbnál, ezért ez lehetetlen.

Ha $p \leq N$, akkor $p + 1 \leq N + 1$, ezért $p + 2 \geq N - 1$-nek kell teljesülni, vagyis $N - 3 \leq p \leq N$.

Azonban a $p = N, N - 1, N - 2, N - 3$ esetek egyike sem elégíti ki a $(p + 1)(p + 2) = (N - 1)(N + 1)$ egyenletet.

Tehát az eredeti állítással teljesen ellentmondásra jutottunk.

8.7.4. Következmény: Ha M prímszám és N páratlan egész, akkor $2M^2$ és N^2 nem lehet barátságos számpár.

8.7.5. Tétel: Tegyük fel, hogy $2^r M^2$ és N^2 ellentétes paritású barátságos számpár. Ha r páratlan, akkor

(1) $(M, 3) = (N, 3)$ és

(2) létezik q prímszám és γ pozitív egész, melyekre $q^\gamma \parallel N$ és $q \equiv \gamma \equiv 1 \pmod 3$;

ha $r \equiv 3 \pmod 4$, akkor

(3) létezik p (q-tól nem feltétlenül különböző) prímszám és δ pozitív egész, hogy $p^\delta \parallel N$ és $2p \equiv \delta \equiv \pmod 5$ és

(4) $M \equiv N \equiv \frac{r+1}{4}\sigma(M^2) \equiv 0 \pmod 5$.

8.7.5. Bizonyítás:

(1) Legyen $r = 2k - 1$. Ekkor a barátságos számpárok tulajdonságai alapján:

$$\sigma(2^{2k-1}M^2) = (2^{2k} - 1)\sigma(M^2) = 2^{2k-1}M^2 + N^2$$

$$2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$$

$$2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$$

$$2^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

Az egyenlőség bal oldala tehát osztható 3-mal, így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha vagy M és N is osztható 3-mal, vagy egyikük sem, és ezt kellett belátni.

(2) $(2^{2k} - 1)\sigma(M^2) = \sigma(N^2)$

Mivel $3|2^{2k}-1$, ezért $\sigma(N^2)$ is osztható 3-mal, így kell, hogy legyen N-nek egy olyan q prímtényezője, melyre $q^\gamma||N$ és $1 + q + q^2 + \ldots + q^{2\gamma}$ osztható 3-mal.

Ekkor $q \equiv 0 \pmod 3$ nem lehetséges.

Ha

$$q \equiv 1 \pmod 3,$$

akkor

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{2\gamma} \equiv 2\gamma + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

$$2\gamma \equiv 2 \pmod 3$$

$$\gamma \equiv 1 \pmod 3,$$

vagyis teljesül az állítás.

Ha

$$q \equiv -1 \pmod 3,$$

akkor

$$1 + q + q^2 + \dots q^{2\gamma} \equiv \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots - 1 + 1}_{2\gamma+1\, tag} \equiv 1 \pmod 3.$$

Tehát ez az eset nem lehetséges.

Ezzel beláttuk a tétel (2) részét.

(3) Legyen $r = 4t - 1$, ahol $t > 0$ egész. Ekkor

$$(2^{4t} - 1)\sigma(M^2) = \sigma(N^2)$$

$2^{4t} \equiv 1 \pmod 5$, vagyis $5|2^{4t} - 1$, így $5|\sigma(N^2)$. Vagyis van N-nek olyan p prímosztója, amelyre $p^\delta||N$ és

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{2\delta} \equiv 0 \pmod 5.$$

Ekkor $5 \nmid p$.

Ha $p \equiv 1 \pmod 5$, akkor

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{2\delta} \equiv 2\delta + 1 \equiv 0 \pmod 5$$

$$2\delta \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5,$$

$$\delta \equiv 2 \equiv 2p \pmod 5,$$

vagyis teljesül az állítás.

Ha $p \equiv 2 \pmod 5$, akkor

$$1 + p + \dots + p^{2\delta} \equiv 1 + 2 + \dots + 2^{2\delta} = \frac{2^{2\delta+1} - 1}{2 - 1} \equiv 0 \pmod 5,$$

$$2^{2\delta+1} - 1 \equiv 0 \pmod 5$$

$$2^{2\delta+1} \equiv 1 \pmod 5,$$

ezért

$$\phi(5) = 4|(2\delta + 1),$$

ez azonban lehetetlen.

Ugyanígy, ha $p \equiv 3 \pmod 5$, akkor

$$1 + p + \ldots + p^{2\delta} \equiv 1 + 3 + \ldots + 3^{2\delta} = \frac{3^{2\delta+1} - 1}{3 - 1} \equiv 0 \pmod 5,$$

így

$$3^{2\delta+1} - 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

vagyis

$$3^{2\delta+1} \equiv 1 \pmod 5,$$

ezért

$$\phi(5) = 4|(2\delta + 1),$$

és ez ismét nem teljesülhet.

Ha $p \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$, akkor

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{2\delta} \equiv \underbrace{1 - 1 + 1 \mp \cdots + 1}_{2\delta+1\, db\, tag} = 1 \pmod 5,$$

tehát ez sem lehetséges.

(4) Mivel

$$(2^{4t} - 1)\sigma(M^2) = 2^{4t-1}M^2 + N^2,$$

és az egyenlőség bal oldala osztható 5-tel, a jobb oldalnak is 5-tel oszthatónak kell lennie.

$$2^{4t-1} \equiv 3 \pmod 5,$$

így ez csak akkor teljesülhet, ha vagy M és N is osztható 5-tel, vagy egyik sem. Ha azonban egyik sem osztható 5-tel, akkor M^2 és N^2 csak ± 1 maradékot adhat 5-tel osztva, így $2^{4t-1}M^2$ viszont csak ± 3 maradékot adhat, és ekkor $2^{4t-1}M^2 + N^2 \equiv 0 \pmod 5$ nem teljesülhet. Tehát $M \equiv N \equiv 0 \pmod 5$.

Ebből az is következik, hogy $2^{4t-1}M^2 + N^2$ osztható 25-tel, és így az egyenlőség bal oldala is osztható 25-tel.

Már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{r+1}{4}\sigma(M^2) = t\sigma(M^2) \equiv 0 \pmod 5.$$

Tegyük fel, hogy $\sigma(M^2) \not\equiv 0 \pmod 5$.

Ekkor

$$2^{4t} - 1 \equiv 0 \pmod{25}.$$

$$\begin{aligned}
2^{4t} - 1 = 16^t - 1 \equiv (-9)^t - 1 = (1-10)^t - 1 \pmod{25} \\
= \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i}(-10)^i - 1 \equiv 1 - 10t - 1 \equiv -10t \pmod{25}
\end{aligned}$$

Így $t = \dfrac{r+1}{4} \equiv 0 \pmod 5$, tehát bebizonyítottuk a tételt.

8.7.6. Tétel: Tegyük fel, hogy $n_1 = 2^r M^2$ és $n_2 = N^2$ barátságos számpár, $r \geq 1$, M és N páratlan. Ha $r = 1$, akkor N nem lehet négyzetszám; ha $r > 1$, akkor M se nem négyzetszám, se nem $4k+3$ alakú prímszám.

8.7.7. Segédtétel: $\sigma(n^2) - d(n^2) \equiv n - 1 \pmod 4$, ha n páratlan.

8.7.7. Bizonyítás:

Ha $d|n$, akkor d is páratlan, ezért $d^2 \equiv n^2 \equiv 1 \pmod 4$ és $d \equiv \dfrac{n^2}{d} \pmod 4$.

Az előzőekből az is következik, hogy vagy $d \equiv \dfrac{n^2}{d} \equiv 1$ vagy $d \equiv \dfrac{n^2}{d} \equiv 3$, vagyis $d + \dfrac{n^2}{d} \equiv 2 \pmod 4$.

Az n^2 osztói osztópárokba állíthatók az n kivételével, és egy-egy pár tagjainak összege 4-gyel osztva kettőt a maradékul, így

$$\sigma(n^2) \equiv \frac{d(n^2)-1}{2} \cdot 2 + n \pmod 4,$$

ezért

$$\sigma(n^2) - n \equiv \frac{d(n^2)-1}{2} \cdot 2 + n - n = d(n^2) - 1$$

$$\sigma(n^2) - d(n^2) \equiv n - 1 \pmod 4$$

8.7.6. Bizonyítás: Először lássuk be azt, hogy ha $r = 1$, akkor N nem lehet négyzetszám. Tegyük fel indirekten, hogy $N = K^2$, vagyis $N^2 = K^4$, ahol $K = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$, p_i páratlan prímszám, $i = 1, \dots, t$.

$$d(N^2) = d(K^4) = \prod_{i=1}^{t}(4\alpha_i + 1) \equiv 1 \pmod 4$$

A barátságos számok definíciója alapján:

$$\sigma(N^2) = 2M^2 + N^2$$

Modulo 4 szerint vizsgálva:

$$\sigma(N^2) \equiv 2 + 1 = 3 \pmod 4$$

A segédtétel alapján:

$$\sigma(N^2) - d(N^2) \equiv N - 1 \pmod 4$$

$$3 - 1 \equiv N - 1 = K^2 - 1 \pmod 4$$

$$3 \equiv K^2 \pmod 4$$

Ez azonban ellentmondás, mert egy páratlan négyzetszám 4-gyel osztva mindig 1-et ad maradékul.

Most tekintsük az $r > 1$ esetet.

Tegyük fel indirekten, hogy M négyzetszám, legyen $M = L^2$, ahol $L = q_1^{\beta_1} \dots q_u^{\beta_u}$, q_i páratlan prímszám, $i = 1, \dots, u$.

Ekkor $(2^{r+1} - 1)\sigma(M^2) = 2^r M^2 + N^2 \equiv 0 + N^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Így $-\sigma(M^2) \equiv 1$, azaz $\sigma(M^2) \equiv -1 \pmod 4$.

Azonban

$$\sigma(M^2) - d(M^2) \equiv M - 1 \pmod 4,$$

azaz

$$\sigma(M^2) - d(M^2) = \sigma(L^4) - d(L^4) \equiv L^2 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

$$\sigma(M^2) - \prod_{j=1}^{u}(4\beta_i + 1) \equiv \sigma(M^2) - 1 \equiv 0 \pmod 4,$$

vagyis

$$\sigma(M^2) \equiv 1 \pmod 4,$$

ami ellentmond az előzőnek.

Tegyük fel indirekten, hogy M egy $4k+3$ alakú prímszám.

M^2 pozitív osztóinak száma: $d(M^2) = 2 + 1 = 3$.

Ugyanakkor a segédtétel alapján

$$\sigma(M^2) - d(M^2) \equiv M - 1 \pmod 4$$

$$1 - d(M^2) \equiv M - 1 \pmod 4,$$

azaz

$$d(M^2) \equiv 2 - M \equiv 2 - L^2 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \pmod 4,$$

ami szintén ellentmondás.

Ez utóbbi indirekt feltevés cáfolható a következőképpen is:

Legyen $M = a = 4k + 3$ alakú prím.

$$\sigma(2^r a^2) = 2^r a^2 + N^2$$

$$(2^{r+1} - 1)(1 + a + a^2) = 2^r a^2 + N^2$$

Ezt mod 4 vizsgálva:

$$(-1)(1 - 1 + 1) \equiv 0 + 1 \pmod 4$$

$$-1 \equiv 1 \pmod 4,$$

amivel ismét ellentmondásra jutottunk.

8.7.7. Tétel: Ha m, n barátságos számpár, akkor

$$\frac{1}{\sum_{d|m} \frac{1}{d}} + \frac{1}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}} = 1.$$

8.7.7. Bizonyítás:

$$\frac{1}{\sum_{d|m} \frac{1}{d}} + \frac{1}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}} = \frac{1}{\frac{\sigma(m)}{m}} + \frac{1}{\frac{\sigma(n)}{n}} = \frac{m}{\sigma(m)} + \frac{n}{\sigma(n)} =$$

$$= \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1.$$

9. A GIMPS-projekt

"A tökéletes számok, a tökéletes emberekhez hasonlóan nagyon ritkák."
/René Descartes/

A GIMPS-projekt (Great Internet Mersenne Prime Search - Nagy Internetes Mersenne-Prím Keresés) célja, hogy újabb és újabb, rekordnagyságú Mersenne-prímeket (és így tökéletes számokat) találjanak számítógépek segítségével. A keresésben bárki segíthet, aki rendelkezik számítógéppel és internetkapcsolattal, csak egy programot kell letöltenie a www.mersenne.org honlapról és azt futtatnia. Akinek a számítógépe egy újabb Mersenne-prímet talál, az pénzjutalomban részesül.

A kereséshez szükséges ingyenes programot George Woltman készítette el 1995-ben. Azóta sokezren csatlakoztak a kereséshez.

Egy ilyen prím megtalálásának az esélye azonban nagyon kicsi. Miért foglalkoznak vele mégis évszázadok óta? Miért csatlakoznak ennyien a GIMPS-projekthez? (2009. május 4-én például 2327-en futtatták a programot 9025 számítógépen.)

Ennek sokféle oka lehet. Például az, hogy ezáltal olyan munkában vesznek részt, melyet azelőtt többek között Descartes, Fermat, Mersenne, Leibniz, Euler végzett. Ki ne szeretné úgy érezni, hogy egy ilyen tagokat magában foglaló társaság része lehet?

Egy másik ok az emberek gyűjtőszenvedélye. Szinte mindenki gyűjtött valamit élete során: bélyegeket, szalvétákat, naptárakat, stb. Minél ritkább, nehezen megszerezhető volt valami, annál értékesebb darabja lett a kollekciónak. Megérte sokáig keresni, utánajárni. Mersenne-prímekből egyelőre mindössze 46-ot ismerünk, ezért egy újabbnak a megtalálása különlegesen értékes dolog. És egyben nagy dicsőség is annak, aki megtalálja, neve örökre beíródik a matematika történetébe.

Vannak, akik a számítógép hardverének tesztelésére használják a GIMPS-projektet. Például az Intel a Pentium II és Pentium Pro processzorokat tesztelte ezzel szállítás előtt, így azok, akiknek a gépében ilyen processzor volt/van, sokat köszönhetnek ennek. (Érdekesség, hogy a Pentium egyik hibájának felfedezése egy ikerprímekkel kapcsolatos számítást végző programnak volt köszönhető, vagyis az ilyen programoknak van gyakorlati hasznuk.)

De matematikai haszna is vannak a keresésnek. Egyrészt, minél több Mersenne-prímet ismerünk, annál többet tudhatunk meg eloszlásukról, könnyebben fogalmazhatunk meg állításokat velük kapcsolatban vagy ellenőrizhetjük meglévő sejtéseinket.

Ezenkívül a keresés során új matematikai módszereket, tételeket fedezhetünk fel, amelyek segítik a matematika fejlődését, akár annak más területein is hasznosíthatók. A tökéletes számok és a velük kapcsolatos Mersenne-prímek keresése során fedezte fel például Fermat a kis-Fermat-tételt.

Nagy prímszámokra szükség van a modern titkosírások miatt, melyek a Mersenne-prímeknek újabb gyakorlati jelentőséget ad.

És végül ne felejtsük el az emberi kiváncsiságot, amely a tudományok fejlődésének nagy hajtóereje.

10. A tökéletes számok az iskolában

A tökéletes számok nem szerepelnek a matematika kerettantervben, még az emelt szintű érettségi követelményei között sem, ezért csak érdekességként kerülhetnek elő a matematika órákon, illetve szakkörök anyagaként bukkanhatnak fel. A tökéletes számok fogalmának megértése nem nehéz, ezért más tantárgyak óráin is előkerülhet. A tantárgyak közötti kapcsolat fontosságát ma sokszor hangsúlyozzák, erre ez a téma tökéletesen alkalmas. Ha a 9. évfolyamon számelméletből megemlítjük őket, akkor utána már más tantárgyak óráin is lehet róluk beszélni, a diákok tudni fogják, hogy miről is van szó. De akár az általános iskolában is előkerülhetnek, hiszen ha a gyerekek már ismerik az osztók fogalmát, és meg tudják keresni egy szám összes osztóját, akkor nem fog nekik gondot okozni e fogalom megértése.

Mely tantárgyak anyagába illeszthetők be?

I. Történelem órán többször is megemlíthetők a tökéletes számok. Az ókori görög történelemnél Pithagorasz és Eukleidész kapcsán, majd a felvilágosodás koránál mindenképpen.

II. Irodalom órán a Bibliával, illetve Szent Ágostonnal kapcsolatban kerülhetnek elő leginkább.

III. Informatika órán is érdekes lehet foglalkozni velük. Azok a diákok, akik programozni tanulnak, készíthetnek egyszerű programokat, melyek például két adott szám között megkeresik a tökéletes számokat vagy amelyek eldöntik, hogy egy szám hiányos, tökéletes vagy bővelkedő.

Részletesebben a tökéletes számok egy lehetséges matematika szakköri feldolgozásáról szeretnék írni. Megtartható a szakkör a 9. évfolyamon, amikor utoljára tanulnak a diákok számelméletet, vagy később, hogy egy kicsit felelevenítsék számelméleti ismereteiket, hiszen ez mind a versenyekre, mind az érettségire készülőknek fontos. Amikor már tanulták a számtani-mértani sorozatokat, akkor többet tudunk beszélni a tökéletes számokról is, de azok a részek, amelyekhez még nem tanultak meg mindent, kihagyhatók. Érdeklődőbb osztályban tárgyalható ez a téma a tantervi órán is.

10.1. Egy középiskolai szakkör

10.1.1. A tökéletes számok fogalmának bevezetése

A matematikai fogalmakat többféleképpen is bevezethetjük. Mivel a tökéletes számok között csak néhány olyan van, amely egy középiskolás számára még kezelhető és nem is könnyű felismerni a köztük lévő hasonlóságot, ezért tisztán induktív módon bevezetésük nagyon nehezen megvalósítható.

Elmondhatjuk a definíciót, majd azt a feladatot adjuk a diákoknak, hogy keressenek néhány ilyen számot. A 6-ot és a 28-at könnyű megtalálni, utána azonban kicsi az esély rá (illetve nagyon sok időre van szükség hozzá), hogy találjanak egy harmadikat is. A hosszú próbálkozás, melynek nincs eredménye, elveheti a kedvüket a témától. Ezért miután megtalálta valaki a két legkisebb tökéletes számot, ne hagyjunk sok időt a felesleges próbálkozásra, inkább írjunk föl nekik néhányat a táblára.

A másik lehetőség, hogy megadunk két-három tökéletes számot, és a diákoknak meg kell állapítaniuk, hogy mi a közös bennük. Kapjanak segítséget, hogy merre keresgéljenek, pl. mondjuk meg nekik, hogy a számok osztóival kapcsolatos tulajdonságot kell keresniük, és ha így nem megy, akkor áruljuk el, hogy az osztók összegét kell figyelni. Így már biztosan fel fogják ismerni a közös tulajdonságot. Hagyjuk ki a 6-ot vagy a 28-at az elején, hogy azt maguknak kelljen megkeresniük ezután.

Mondassuk is ki a gyerekekkel, hogy mi a közös tulajdonság. Figyeljünk oda az osztók, valódi osztók, a számnál kisebb osztók elnevezéseinek helyes használatára, megkülönböztetésére. Akár a három különböző fogalom felhasználásával kérhetünk három különböző definíciót is:

Definíció 1: Azokat a számokat, amelyeknek kétszerese megegyezik az összes pozitív osztójuk összegével, tökéletes számoknak nevezzük.

Definíció 2: Azokat a számokat, amelyek valódi osztóinak összege 1-gyel kisebb magánál a számnál, tökéletes számoknak nevezzük.

Definíció 3: Azokat a számokat, amelyek egyenlőek a náluk kisebb osztóik összegével, tökéletes számoknak nevezzük.

Természetesen az utolsó definíció mutatja legjobban tökéletességüket, de a fogalmak közti különbségre a háromféle definíció jól felhívja a figyelmet.

10.1.2. A pozitív egész számok csoportosítása

Ezután kérjük meg a gyerekeket, hogy a szám és osztói összegének viszonya alapján találjanak ki valamilyen csoportosítást a pozitív egész számokra. Ahogyan a valós számok nagysága alapján vannak pozitív és negatív számok valamint a nulla, úgy a pozitív egész számok osztóinak összege alapján vannak bővelkedő, hiányos és tökéletes számok.

Minden csoportra keressen minden diák legalább 2-2 példát, majd ezeket osszák meg padszomszédjukkal, és ellenőrizzék le egymás találatait.

Végül összesítsük a diákok által gyűjtött példákat, így bővelkedő és hiányos számokból is lesz elég.

Ezután gondolják végig a diákok párokban, hogy egy bővelkedő/tökéletes/hiányos szám többszöröseiről és osztóiról mit mondhatunk, mely csoportokba eshetnek. A gyerekek vitatkozzanak egymással, győzzék meg egymást, ha valamiben nem értenek egyet, keressenek példákat, ellenpéldákat. Utána közösen beszéljük meg ezeket, esetleg néhányat be is bizonyíthatunk, mert az a típusú bizonyítás, amelyben felsoroljuk a osztóit, majd ezek k-szorosával megkapjuk ka osztóinak egy részét, és ez alapján vonunk le következtetéseket, a középiskolában is megérthető.

10.1.3. A tökéletes számok képlete

Írjuk fel Eukleidésznek a tökéletes számok alakjára vonatkozó tételét, és ez alapján írják föl a tanulók a képletet betűkkel és számokkal. Ha már tanulták a mértani sorozat összegképletét, akkor be is bizonyíthatjuk, hogy az ilyen alakú számok valóban tökéletesek. Az, hogy minden páros tökéletes szám ilyen alakú, már túl nehéz a középiskolában.

10.1.4. Kérdések, sejtések megfogalmazása a tökéletes számokkal kapcsolatban

Csoportokban próbáljanak a gyerekek kérdéseket és sejtéseket megfogalmazni a tökéletes számokkal kapcsolatban, majd ezeket beszéljük meg közösen. Néhány dolgot, mint például azt, hogy a tökéletes számok 6-ra vagy 8-ra végződnek, észrevehetnek segítség nélkül is, másokhoz viszont szükség van egy kis segítségre (pl. háromszögszámok, hatszögszámok, stb.). Például mondjuk meg nekik, hogy nézzék meg, valamilyen alakzatba rendezhetőek-e a tökéletes számokat jelképező kavicsok, vagyis figurális számok-e. Ez, persze, könnyebb, ha már tanultak ezekről a számokról. A csoporttól függően döntsük el, hogy mit bizonyítunk be. Mindenképpen beszéljünk a megoldatlan problémákról, ezek egy része valószínűleg úgyis felmerül (vannak-e páratlan tökéletes számok, végtelen sok tökéletes szám van-e, stb.). Meséljünk a GIMPS-projektről, amelyhez akár ők is csatlakozhatnak, vagy adjuk ki szorgalminak, hogy nézzenek utána, mi is az.

Ennek kapcsán beszélhetünk egyéb megoldatlan matematikai problémákról, ennek utánanézni lehet szorgalmi feladat is. A többezer éves megoldatlan számelméleti problémák könnyen megérthetők a középiskolában. Például a prímszámokkal kapcsolatban beszélhetünk a Fermat-prímekről és azok számáról (van-e végtelen sok), prímszámokból álló számtani sorozatokról (milyen hosszú lehet), ikerprímekről (van-e végtelen sok ikerprímpár) vagy a Goldbach-sejtésről. Ez utóbbinál előkerülhet a bővelkedő számokkal kapcsolatos Goldbach-típusú tétel, amely viszont egyszerűen bebizonyítható, akár középiskolában is.

Kiadhatjuk kiselőadásnak a tökéletes számok történetét, főleg, ha tanórán foglalkozunk velük, és vannak, akik a matematika iránt kevésbé fogékonyak, de a történelemmel való kapcsolat felkeltheti az érdeklődésüket.

11. Függelék I. A ma ismert Mersenne-prímek és tökéletes számok

Az eddig felfedezett $M_p = 2^p - 1$ alakú Mersenne-prímek és a belőlük képzett $T_p = (2^p - 1)2^{p-1}$ alakú tökéletes számok listája. A sorszám helyett a lista végén azért állnak kérdőjelek, mert nem tudjuk, hogy az újonnan felfedezett Mersenne-prímek között nincs-e másik, amelyet még nem találtunk meg.

sor–száma	p	M_p *jegyeinek száma*	T_p *jegyeinek száma*	*Felfedezés éve*	*Felfedezője*
1	2	1	1	----	----
2	3	1	2	----	----
3	5	2	3	----	----
4	7	3	4	----	----
5	13	4	8	1456	*ismeretlen*
6	17	6	10	1588	*Cataldi*
7	19	6	12	1588	*Cataldi*
8	31	10	19	1772	*Euler*
9	61	19	37	1883	*Pervushin*
10	89	27	54	1911	*Powers*
11	107	33	65	1914	*Powers*
12	127	39	77	1876	*Lucas*
13	521	157	314	1952	*Robinson*
14	607	183	366	1952	*Robinson*
15	1279	386	770	1952	*Robinson*
16	2203	664	1327	1952	*Robinson*
17	2281	687	1373	1952	*Robinson*
18	3217	969	1937	1957	*Riesel*

$Sor-$ $szám$	p	M_p $jegyeinek$ $száma$	T_p $jegyeinek$ $száma$	$Felfedezés$ $éve$	$Felfedezője$
19	4253	1281	2561	1961	$Hurwitz$
20	4423	1332	2663	1961	$Hurwitz$
21	9689	2917	5834	1963	$Gillies$
22	9941	2993	5985	1963	$Gillies$
23	11213	3376	6751	1963	$Gillies$
24	19937	6002	12003	1971	$Tuckerman$
25	21701	6533	13066	1978	$Noll, Nickel$
26	23209	6987	13973	1979	$Noll$
27	44497	13395	26790	1979	$Nelson, Slowinski$
28	86243	25962	51924	1982	$Slowinski$
29	110503	33265	66530	1988	$Colquitt,$
30	132049	39751	79502	1983	$Slowinski$
31	216091	65050	130100	1985	$Slowinski$
32	756839	227832	455663	1992	$Slowinski,$ $Gage$
33	859433	258716	517430	1994	$Slowinski,$ $Gage$
34	1257787	378632	757263	1996	$Slowinski,$ $Gage$
35	1398269	420921	841842	1996	$Armengaud,$ $Woltman,$ $(GIMPS)$
36	2976221	895932	1791864	1997	$Spence,$ $Woltman,$ $(GIMPS)$

$Sor-$ $szám$	p	M_p $jegyeinek$ $száma$	T_p $jegyeinek$ $száma$	$Felfedezés$ $éve$	$Felfedezője$
37	3021377	909526	1819050	1998	$Clarkson,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
38	6972593	2098960	4197919	1999	$Hajratwala,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
39	13466917	4053946	8107892	2001	$Cameron,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	20996011	6320430	12640858	2003	$Shafer,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	24036583	7235733	14471465	2004	$Findley,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	25964951	7816230	15632458	2005	$Nowak,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$

$Sor-$ $szám$	p	M_p $jegyeinek$ $száma$	T_p $jegyeinek$ $száma$	$Felfedezés$ $éve$	$Felfedezője$
??	30402457	9152052	18304103	2005	$Cooper,$ $Boone,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	32582657	9808358	19616714	2006	$Cooper,$ $Boone,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	37156667	11185272	22370543	2008	$Elvenich,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$
??	43112609	12978189	25956377	2008	$Smith,$ $Woltman,$ $Kurowski$ $(GIMPS)$

Ez összesen 46 Mersenne-prím, illetve tökéletes szám, ma ennyit ismerünk.

12. Függelék II. Egy- és kétjegyű számok jegyeinek négyzetösszege

1: $1^2 = 1$

2: $2^2 = 4$

$4^2 = 16$

$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$

$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$

$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$

$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

3: $3^2 = 9$

$9^2 = 81$

$8^2 + 1^2 = 64 + 1 = 65$

$6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

$6^2 + 1^2 = 36 + 1 = 37 \rightarrow 4$

4: $4^2 = 16 \rightarrow ... \rightarrow 4$

5: $5^2 = 25$

$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

$2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$

$8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89 \rightarrow 4$

6: $6^2 = 36$

$3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$
$$4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$$
$$1^2 + 7^2 = 1 + 49 = 50$$
$$5^2 + 0^2 = 25 + 0 = 25 \to 4$$

7: $7^2 = 49$
$$4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$$
$$9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130$$
$$1^2 + 3^2 + 0^2 = 1 + 9 + 0 = 10$$
$$1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

8: $8^2 = 64$
$$6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$
$$5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \to 4$$

9: $9^2 = 81 \to \cdots \to 4$

A kétjegyű számok közül, elég azokat nézni, amelyeknek az első jegye nem kisebb a másodiknál, mert a jegyek felcserélésével azok négyzetösszege nem változik.

A már valahol előfordult számoknál csak nyíllal utalok a végeredményre.

11: $1^2 + 1^2 = 2 \to 4$

12: $1^2 + 2^4 = 5 \to 4$

13: $1^2 + 3^2 = 10 \to 1$

14: $1^2 + 4^2 = 17$
$$1^2 + 7^2 = 50 \to 5 \to 4$$

15: $1^2 + 5^2 = 26$
$$2^2 + 6^2 = 40 \to 4$$

16: $\to 4$

17: $\to 4$

18: $1^2 + 8^2 = 65 \to 4$

19: $1^2 + 9^2 = 82$

$2^2 + 8^2 = 68$

$6^2 + 8^2 = 100 \to 1$

22: $2^2 + 2^2 = 8 \to 4$

23: $2^2 + 3^2 = 13 \to 1$

24: $2^2 + 4^2 = 20 \to 4$

25: $\to 4$

26: $\to 4$

27: $2^2 + 7^2 = 53$

$5^2 + 3^2 = 34$

$3^2 + 4^2 = 25 \to 4$

28: $2^2 + 8^2 = 68$

$6^2 + 8^2 = 100 \to 1$

29: $\to 4$

33: $3^2 + 3^2 = 18 \to 4$

34: $\to 4$

35: $\to 4$

36: $3^2 + 6^2 = 45 \to 4$

37: $\to 4$

38: $3^2 + 8^2 = 73 \to 4$

39: $3^2 + 9^2 = 90 \to 4$

44: $4^2 + 4^2 = 32 \to 1$

45: $\to 4$

46: $4^2 + 6^2 = 52 \to 4$

47: $4^2 + 7^2 = 65 \to 4$

48: $4^2 + 8^2 = 80 \to 4$

49: $\to 1$

55: $5^2 + 5^2 = 50 \to 4$

56: $\to 4$

57: $5^2 + 7^2 = 74 \to 4$

58: $\to 4$

59: $5^2 + 9^2 = 106 \to 4$

66: $6^2 + 6^2 = 72 \to 4$

67: $6^2 + 7^2 = 85 \to 4$

68: $6^2 + 8^2 = 100 \to 1$

69: $6^2 + 9^2 = 127$

$1^2 + 2^2 + 7^2 = 54 \to 4$

77: $7^2 + 7^2 = 98 \to 4$

78: $7^2 + 8^2 = 113$

$1^2 + 1^2 + 3^2 = 11 \to 4$

79: $7^2 + 9^2 = 130 \to 1$

88: $8^2 + 8^2 = 128$

$1^2 + 2^2 + 8^2 = 69 \to 4$

89: $\to 4$

99: $9^2 + 9^2 = 162$

$1^2 + 6^2 + 2^2 = 41 \to 4$

Tehát minden kétjegyű számra elvégezve az eljárást, a végén 1-et vagy 4-et kapunk.

13. Irodalomjegyzék

Albert H. Beiler: Recreations in the Theory of Numbers - The Queen of Mathematics Entertains, Dover Publications 1964.

Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó 2004.

David M. Burton: Elementary Number Theory, McGraw-Hill Science/Engineering/Math 2007.

Erdős Pál - Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, POLYGON 1996.

Euklidész: Elemek, Gondolat 1983.

Freud Róbert - Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó 2000.

Richard K. Guy: Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag 1981.

Ruzsa Z. Imre: Számelméleti függvények I-II. (Matematikai Lapok 27. évf. 1-2., 3-4. sz.) Bolyai János Matematikai Társulat 1976-79.

Wacław Sierpiński: A Selection of the Problems in the Theory of Numbers, Macmillan 1964.

Mariano Garcia: On numbers with integral harmonic mean, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954) 89-96.

A. A. Gioia and A. M. Vaidya: Amicable numbers with opposite parity, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967) 969-973.

Oystein Ore: On the averages of the divisors of a number, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948) 615-619.

J. Sándor - B. Crstici: Handbook of Number Theory II, Kluwer Academic Publishers 2004.

George F. Simmons: Calculus Gems - Brief Lives and Memorable Mathematics, McGraw-Hill Companies 1992.

James J. Tattersall: Elementary Number Theory in Nine Chapters, Cambridge University Press 2005.

Song Y. Yan: Number Theory for Computing, Springer-Verlag 2002.

Szent Biblia, Magyar Biblia-Tanács 1990.

www.mersenne.org

primes.utm.edu

www.gap-system.org/~history/HistTopics/Perfect_numbers.html